ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Βασικές Μαθηματικές Μέθοδοι

Αντί Προλόγου

> Όλη η φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του Σύμπαντος, το οποίο είναι πάντοτε ανοικτό μπροστά στα μάτια μας. Όμως το βιβλίο αυτό δεν μπορεί να γίνει κατανοητό, αν δεν μάθουμε πρώτα τη γλώσσα στην οποία είναι γραμμένο και δεν διδαχθούμε την αλφάβητο στην οποία είναι γραμμένο. Το βιβλίο αυτό είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών και οι χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, που χωρίς αυτά είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μία λέξη· χωρίς τη γνώση αυτή περιπλανιόμαστε σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο.
>
> *Γαλιλαίος*

Το παρόν εγχειρίδιο αποτελεί μια φλύαρη προσπάθεια να εισαγάγει τους πρωτοετείς φοιτητές του Φυσικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών σε έννοιες, συμβολισμούς, ποσότητες μαθηματικού χαρακτήρα και φυσικού περιεχόμενου. Το κείμενο είναι γραμμένο σε μορφή συζήτησης με εξερευνητικό χαρακτήρα. Ελπίζω το νέο αυτό μάθημα να δώσει τη δυνατότητα στους φοιτητές και τις φοιτήτριές μας να συνεχίσουν την υπέροχη πορεία τους στο Φυσικό Τμήμα, εφοδιασμένοι με τα κατάλληλα εργαλεία, ώστε να μπορέσουν να δομήσουν με γόνιμο και διαισθητικό τρόπο τις έννοιες, με τις οποίες θα έρθουν αντιμέτωποι και αντιμέτωπες στο μέλλον.

Θα ήθελα από τις γραμμές αυτές να ευχαριστήσω τον φίλο και συνάδελφο Πέτρο Ιωάννου, που υπήρξε ο εμπνευστής αυτού του μαθήματος. Μέσα από ατελείωτες συζητήσεις όλα τα χρόνια τις εκπαιδευτικής μας συνεργασίας με κατέστησε κοινωνό του πλούτου των ιδεών του και έτσι μεγάλο μέρος του παρόντος εγχειριδίου απηχεί αυτή την ιδιαίτερη ακαδημαϊκή εμπειρία.

Φεβρουάριος 2022

Φωτογραφία από την εκδρομή με τους φοιτητές του Φυσκού Τμήματος τον Οκτώβριο του 2021.

1 Διανύσματα *(προς...)*

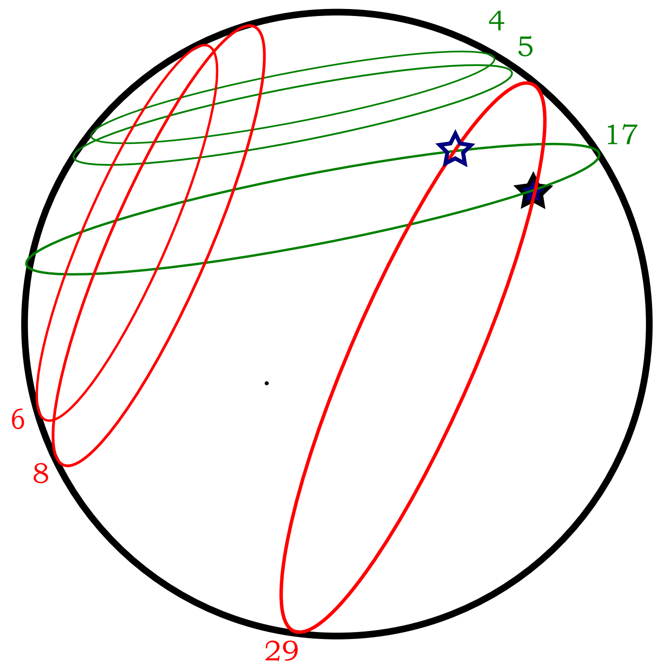
1.1 Η χωροθέτηση μέσω συντεταγμένων

–Βρίσκομαι στο γραφείο μου και γράφω αυτό το βιβλίο.
–Και πού ακριβώς βρίσκεται το γραφείο σου;
–Στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ.
–Και το Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ που είναι;
–Στην Πανεπιστημιόπολη, στην περιοχή του Ζωγράφου, στην Αθήνα της Ελλάδας. Μήπως θα συνενοούμασταν πιο γρήγορα αν σου έδινα τις συντεταγμένες του, $37^\circ\ 58'\ 05''\ N$, $23^\circ\ 46'\ 57''\ E$;
–Το γύρισες στα νούμερα για να με ζαλίσεις και να με μπερδέψεις με αυτά τα ακαταλαβίστικα σύμβολα...
–Όχι ακριβώς το αντίθετο, επέκτεινα το λεξιλόγιο με νέες και ακριβείς σημασιολογικά λέξεις για να μην χαθείς. Όταν εσύ λες σε κάποιον "πάρε αυτό το δρόμο προς τα κάτω και όταν συναντήσεις το κτίριο τάδε, κάνε δεξιά μέχρι να συναντήσεις το τρίτο φανάρι, οπότε τότε συνέχισε στο δρόμο που βρίσκεται στο αριστερό σου χέρι και ..." είσαι πιο ακριβής ή μήπως πιο λακωνικός;

Στη Φυσική (και όχι μόνο) χρειαζόμαστε ένα τρόπο να συνεννοούμαστε γρήγορα, απλά και, πάνω από όλα, να καταλαβαίνουμε όλοι το ίδιο ακριβώς πράγμα. Φυσικά για το λόγο αυτό θα πρέπει να εμπλουτίσουμε το λεξιλόγιό μας και να εντρυφήσουμε στη νέα γλώσσα, να μάθουμε τη γραμματική της, την ορθογραφία της και το συντακτικό της. Η νέα αυτή επέκταση της γλώσσας είναι τα μαθηματικά.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με ένα ιδιαίτερο είδος μαθηματικού λόγου. Το *διανυσματικό λογισμό*. Πρόκειται για την περιγραφή μεγεθών, όπως η θέση του γραφείου μου, που μόνο ένας αριθμός, όπως η θερμοκρασία στο γραφείο μου (μαζί με τη συνοδευόμενη κατάλληλη μονάδα μέτρησης) δεν είναι αρκετός. Για την ταυτοποίηση της θέσης του γραφείου μου χρειάζονται και η τιμή του γεωγραφικού πλάτους ($37^\circ\ 58'\ 05''\ N$, δηλαδή 37 μοίρες, 58 πρώτα λεπτά και 5 δευτερόλεπτα τόξου Βόρεια) και η τιμή του γεωγραφικού μήκους ($23^\circ\ 46'\ 57''\ E$, δηλαδή 23 μοίρες, 46 πρώτα λεπτά και 57 δευτερόλεπτα τόξου Ανατολικά). Χρειάζονται, δηλαδή, δύο αριθμοί για να καθοριστεί η θέση του γραφείου μου στην υδρόγειο σφαίρα, εφόσον συνενοούμαστε με νοήμονα όντα που στόχο έχουν να καθορίσουν ένα σημείο στη Γη και ακολουθούν τις ίδιες συμβάσεις για τον προσδιορισμό και τη γραφή των γεωγραφικών συντεταγμένων. (Για την ακρίβεια, θα χρειαζόμασταν άλλη μια πληροφορία για το σε ποιον όροφο βρίσκεται το γραφείο μου, αλλά με μια απλή ερώτηση σε κάποιο τυχαίο γραφείο θα μπορούσες τελικά να το εντοπίσεις, αν δεν μπερδευτείς από την αρίθμηση των πανομοιότυπων ορόφων του Τμήματος Φυσικής.)

Ας σχολιάσουμε εκτενέστερα το πλήθος των αριθμών που απαιτούνται σε κάθε περίπτωση προσδιορισμού κάποιας θέσης. Εφόσον θέλουμε να καθορίσουμε τη θέση σε κάποια επιφάνεια (συγκεκριμένα τη γήινη επιφάνεια) απαιτούνται δύο αριθμοί. Με άλλα λόγια, μπορώ να καθορίσω μονοσήμαντα τη θέση πάνω σε μια σφαίρα παρουσιάζοντας ακριβώς δύο αριθμούς. Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας κάπως αυθαίρετης προσπάθειας για μιας τέτοια σηματοδότηση. Σχεδιάζουμε ένα πλήθος παράλληλων κύκλων στη σφαίρα, τέμνοντάς αυτήν με πολλά παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα. Στον κάθε τέτοιο κύκλο μπορούμε να αποδώσουμε έναν ξεχωριστό αριθμό (βλ. σχήμα). Στη συνέχεια επιλέγουμε μια δεύτερη συστοιχεία τέτοιων παράλληλων κύκλων τέμνοντάς την υδρόγειο σφαίρα με επίπεδα που *δεν* είναι παράλληλα στα πρώτα και αποδίδουμε και σε αυτά από έναν ξεχωριστό αριθμό. Τώρα κάθε σημείο της σφαίρας τέμνεται από δύο μόνο κύκλους –έναν από το πρώτο σετ και έναν από το δεύτερο. Τελειώσαμε; Δυστυχώς όχι, μάλλον τα μπερδέψαμε. Δύο μη παράλληλοι κύκλοι πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, εφόσον τέμνονται[1], τέμνονται σε δύο σημεία (ή σε ένα στις ακραίες περιπτώσεις που οι δύο κύκλοι εφάπτονται). Δυστυχώς, το ζεύγος αριθμών που καθορίζει τους δύο κύκλους δεν σηματοδοτεί ένα, αλλά δύο σημεία πάνω στη σφαίρα!



Σχήμα 1: Προσδιορισμός της θέσης μέσω διαδοχικών παράλληλων κύκλων (πράσινων: 4,5,17,... και κόκκινων: 6,8,29, ...). Δυστυχώς η τομή τους οδηγεί σε δύο σημεία (πλήρες και άδειο αστέρι)!

Μήπως είναι τελικά αδύνατο με δύο αριθμούς να καθορίσουμε μονοσήμαντα (δηλαδή με μοναδικό τρόπο) τη θέση μας πάνω στην υδρόγειο σφαίρα, και η διαισθητική

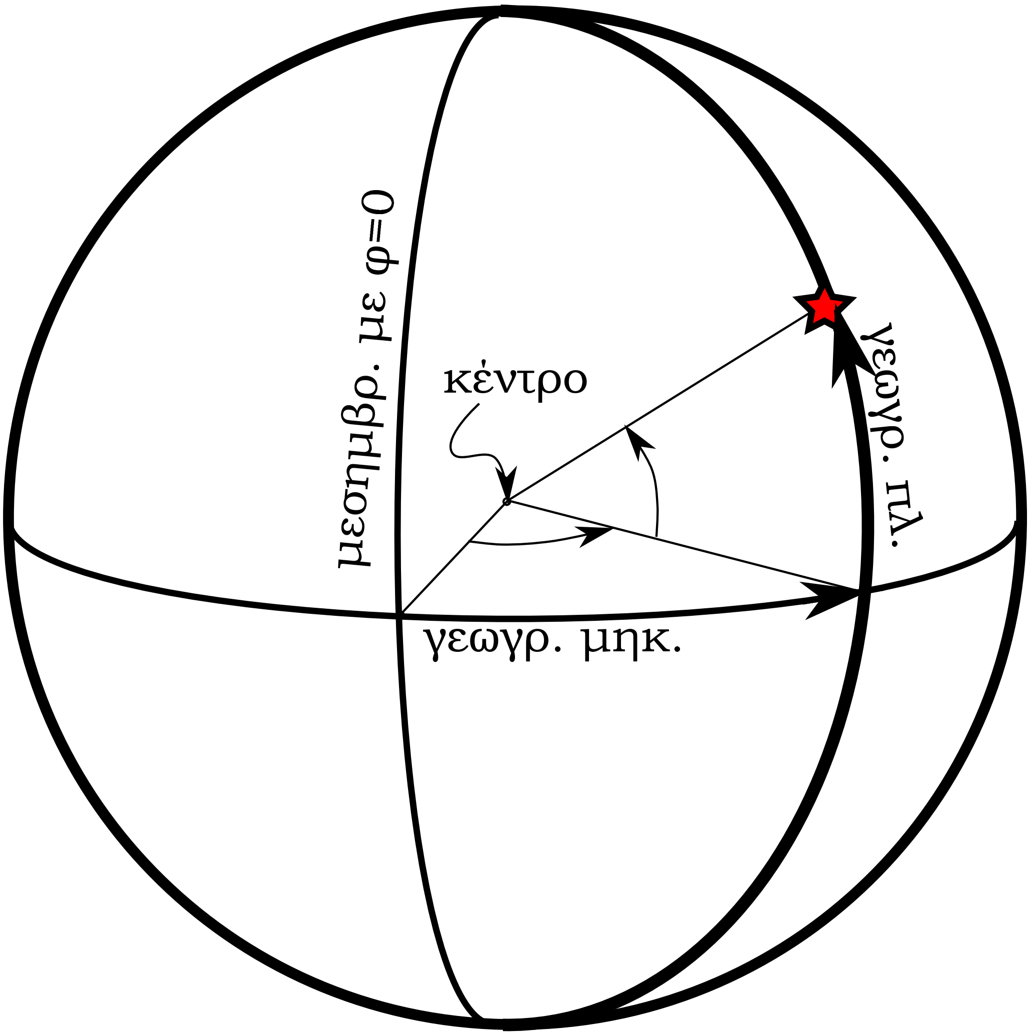
[1] Υπάρχει και περίπτωση να μην τέμνονται; Ζωγραφίστε ένα τέτοιο παράδειγμα ζεύγους κύκλων.

θεώρηση ότι πάνω σε μια δισδιάστατη επιφάνεια αρκούν δύο αριθμοί για τον καθορισμό κάποιας θέσης είναι τελικά λανθασμένη; Όχι, η διαίσθηση δεν μας γελάει (αν και κρύβει κάποια σκοτεινά σημεία στην περίπτωση των κλειστών επιφανειών -στη μαθηματική αργκό στους συμπαγείς χώρους άνευ περάτων-, όπως είναι η σφαίρα). Αν είχαμε επιλέξει κατάλληλα (λίγο πιο έξυπνα) το σύστημα συντεταγμένων –αντί των προαναφερθέντων συστοιχιών από κύκλους– τα πράγματα θα ήταν πιο καλά. Το μυστικό είναι να αποφύγουμε τη δεύτερη τομή και αυτό είναι εφικτό αν το δεύτερο σετ κύκλων μετατρεπόταν σε σετ ημικυκλίων. Ο κλασικός προσδιορισμός γεωγραφικών συντεταγμένων με παράλληλους κύκλους (που καθορίζουν το γεωγραφικό πλάτος –ο Ισημερινός αντιστοιχεί στο 0) και μεσημβρινούς (που καθορίζει το γεωγραφικό μήκος) είναι μια τέτοια καλή επιλογή. Οι μεσημβρινοί είναι ημικύκλια με άκρα τους πόλους και οι οποίοι τέμνουν ο καθένας τον Ισημερινό (και κάθε παράλληλο) σε ένα μόνο σημείο. Ίσως να έχετε ήδη αναρωτηθεί αν το $23^\circ\ 46'\ 57''\ E$ είναι ένας αριθμός. Ναι είναι ένας αριθμός. Απλώς η ιστορία του ανθρώπινου πνεύματος έχει αφήσει ένα άκομψο αποτύπωμα. Η γωνία που θα καθόριζε σε ποιον μεσημβρινό αναφερόμαστε μετρήθηκε σε μοίρες και υποδιαιρέσεις αυτών (πρώτα λεπτά και δευτερόλεπτα τόξου), ενώ θα ήταν προτιμότερο να μετράται σε ακτίνια, τη φυσική μονάδα μέτρησης των γωνιών. Παράλληλα η ιστορία των εξερευνήσεων διέκρινε την Ανατολή (E) από τη Δύση (W), ενώ θα μπορούσε κανείς πιο απλά να αριθμήσει τη γωνία του γεωγραφικού μήκους μέχρι να κλείσει έναν πλήρη κύκλο, αυξάνοντας τα νούμερα είτε προς την Ανατολή είτε προς τη Δύση μέχρι το 2π. Αντίστοιχα το γεωγραφικό πλάτος $37^\circ\ 58'\ 05''\ N$ (για να υπάρχει κάποια αντιστοιχία με το γεωγραφικό μήκος) έλαβε το διακριτικό N (Βορράς) προκειμένου να ξεχωρίσει από τα γεωγραφικά μήκη, ως "πάνω" (ή "κάτω", ανάλογα με το πως κοιτάζει κανείς τη Γη από το Διάστημα) από τον Ισημερινό. Αν θέλαμε λοιπόν να αποδώσουμε ένα "καλό" ζευγάρι αριθμών για να καθορίσουμε τη θέση του γραφείου μου (το οποίο θα καταλάβαινε ακόμη και ένας νοήμων εξωγήινος) θα ήταν $(+0.662667, 0.415083)$.[2] Το + απλώς θα υπενθύμιζε ότι υπάρχουν βόρεια και νότια πλάτη, και αν ήταν αρκετά νοήμων δεν θα χρειαζόταν καν να του επισημάνουμε ότι το πρώτο νούμερο είναι το πλάτος και το δεύτερο το μήκος, αφού η δεύτερη γωνία, αυτή του μήκους, θα έτρεχε απλώς από το 0 ως το $2\pi = 6.28...$,[3] ενώ το διακριτικό + στο γεωγραφικό πλάτος θα σηματοδοτούσε την ιδιαιτερότητά μας να μετράμε τις γωνίες από τον Ισημερινό.[4]

[2]Καλό θα ήταν να ελέγξετε αν η ακρίβεια των παραπάνω δεκαδικών αντιστοιχεί στην ακρίβεια των γωνιών σε μοίρες, λεπτά και δευτερόλεπτα.

[3]Αν τον πληροφορούσαμε και για άλλα σημεία ενδιαφέροντος (πιο ενδιαφέροντα από το γραφείο μου) θα έβλεπε πρώτα νούμερα που θα έφταναν ως το 1.570796 και δεύτερα νούμερα που θα έφταναν ως το 6.283185.

[4]Αν και όλες οι συμβάσεις (μέτρηση με ακτίνια, διαχωρισμός γεωγραφικού πλάτους σε Βόρειο και Νότιο, επιλογή του γεωγραφικού πλάτους ως πρώτο νούμερο) είναι λογικές επιλογές που θα μπορούσε κανείς να καταλάβει, η σύμβαση της επιλογής κατεύθυνσης Ανατολικά για την αρίθμηση των μεσημβρινών και Βόρεια με + είναι κάτι εντελώς αυθαίρετο και θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να προσφέρουμε αυτή την πληροφορία ξέχωρα. Θα πρέπει να σημειώσουμε επίσης, ότι πέραν των προαναφερθεισών αυθαιρεσιών στο συμβολισμό, το γεωγραφικό μήκος κρύβει μια επιπλέον αυθαιρεσία. Ποιος είναι αλή-



Σχήμα 2: Προσδιορισμός της θέσης στη Γη μέσω γεωγραφικού μήκους και πλάτους.

Αναφέραμε πιο πάνω ότι η σηματοδότηση με έναν ξεχωριστό αριθμό για κάθε κύκλο (ή ημικύκλιο) είναι απαραίτητη για τη σηματοδότηση ενός τόπου μονοσήμαντα. Αν και αυτό είναι σωστό θα είχαμε να αντιμετωπίσουμε ένα χάος αν η αρίθμηση γινόταν τελείως τυχαία, π.χ. αν αποδίδαμε στον παράλληλο κύκλο που διέρχεται από το γραφείο μου τον αριθμό 0, στον Ισημερινό τον αριθμό 1, σε αυτόν που διέρχεται από το

θεια ο μεσημβρινός που αντιστοιχεί σε γεωγραφικό μήκος $0°$; Θα μπορούσατε να προτείνετε εσείς έναν τρόπο άρσης της αυθαιρεσίας αυτής παρουσιάζοντας δύο ακόμη αριθμούς που θα διευκόλυναν το σοφό εξωγήινο να καταλάβει από που μετριέται το γεωγραφικό μήκος; (Προφανώς αν δείχνατε στο χάρτη το Λονδίνο θα τελειώνατε, αλλά τότε θα έπρεπε να του στείλετε και μια φωτογραφία του αστεροσκοπείου του Greenwich στο Kent του Λονδίνου, που θα περιέχει προφανώς πολύ μεγαλύτερη ποσότητα πληροφορίας από κάποιους απλούς αριθμούς.)

πατρικό μου σπίτι τον αριθμό 2 κ.ο.κ. Ακόμη και αν αποδεχόταν κανείς την αυθεντία της δικής μου επιλογής θα υπήρχε ένα θέμα με τη συνέχεια της αρίθμησης, δηλαδή κάθε διαφορετικός τόπος θα μπορούσε να έχει έναν φυσικό αριθμό που να αντιστοιχεί στον παράλληλο κύκλο που διέρχεται από αυτόν; Και επιπλέον αν γνωρίζαμε τους δύο αριθμούς που αντιστοιχούν στον παράλληλο κύκλο και το ημικύκλιο ενός τόπου θα μπορούσαμε να τους χρησιμοποιήσουμε για να εκτιμήσουμε την απόσταση μεταξύ δύο τόπων; Για να μην φλυαρούμε, όμως, θέτοντας τέτοια περίεργα ερωτήματα, θα αρκεστούμε στην προφανή επιλογή αρίθμησης που δώσαμε αρχικά μέσω των γεωγραφικών συντεταγμένων (μήκους-πλάτους) με συνεχείς πραγματικούς αριθμούς που υποδηλώνουν γωνίες, έτσι ώστε ένας παράλληλος κύκλος που βρίσκεται βορειότερα από έναν δεύτερο παράλληλο κύκλο, να αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τιμή και όσο πιο κοντά βρίσκονται δύο τέτοιοι κύκλοι, τόσο πιο κοντινοί να είναι οι αντίστοιχοι αριθμοί.[5]

Συνοψίζοντας, για να καθορίσουμε ένα σημείο σε μια δισδιάστατη επιφάνεια, απαιτούνται δύο αριθμοί. Όμως θα πρέπει να τονιστεί ότι αυτή η δυάδα αριθμών χρειάζεται να συνοδεύεται από κάποιο μικρό πλήθος προσυμφωνημένων συμβάσεων που αφορούν στη σειρά των αριθμών (π.χ. πρώτα να γράφουμε το γεωγραφικό πλάτος και κατόπιν το γεωγραφικό μήκος) και στην επιλογή της κατεύθυνσης μέτρησης των γωνιών, πέραν της επιλογής των συγκεκριμένων συντεταγμένων που για μια σφαίρα με άξονα περιστροφής αποτελεί την πλέον προφανή επιλογή. Θα έπρεπε να προσθέσουμε και την επιλογή της μονάδας μέτρησης, αν και για μια σφαίρα δεν υπάρχει καμία άλλη πέραν των ακτινίων ως η φυσικότερη (περισσότερα στο 2ο κεφάλαιο).

1.2 Η γλώσσα των διανυσμάτων και οι διάλεκτοι αυτής

Στο προηγούμενο εδάφιο διερευνήσαμε το πως μπορούμε να κωδικοποιήσουμε με λέξεις-αριθμούς σύντομα, κομψά και χρηστικά (καθώς και με μια δόση ικανοποίησης ότι απευθυνόμαστε σε ευφυείς ανθρώπους ή εξωγήινους) μια θέση πάνω στη Γη.

Είναι μάλλον προφανές, κατ' αντιστοιχία, ότι ο καθορισμός κάποιας θέσης σε έναν μονοδιάστατο κόσμο (πάνω σε ένα σύρμα), ή σε μια επιφάνεια (πάνω σε ένα φύλλο χαρτί ή πάνω στην υδρόγειο), ή στον τριδιάστατο κόσμο που μας περιβάλλει ή σε έναν ακόμη μεγαλύτερης διάστασης κόσμο που μπορούμε να φανταστούμε ή να επινοήσουμε, μπορεί να γίνει με έναν, δύο, τρεις ή περισσότερους, αντίστοιχα, αριθμούς. Το μόνο που απαιτείται είναι μια προσυνενόηση για τι μετράει ο κάθε αριθμός, σε τι μονάδες, ποια είναι η κατεύθυνση που προχωράει κανείς καθώς αυξάνεται κάποιος αριθμός και ποια είναι η σειρά εμφάνισης των αριθμών-κατευθύνσεων.

Ίσως στο σημείο αυτό κάποιος να οδηγηθεί στο συμπέρασμα ότι τα διανύσματα στα οποία αναφερόμαστε με αυτές τις N-άδες αριθμών απλώς χρησιμοποιούνται για να

[5]Να σημειώσουμε ότι οι δύο αυτές συνθήκες επιτυγχάνονται με την επιλογή των γωνιών που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά δεν είναι μοναδική η επιλογή αυτών. Σκέφτεστε μήπως και κάποια άλλη; Ένας συμφοιτητής σας πρότεινε μια τέτοια.

σηματοδοτήσουμε απλώς μια θέση και τίποτε παραπάνω. Η θεώρηση αυτή είναι παντελώς μυωπική. Όταν σπρώχνουμε ένα αντικείμενο (ακόμη και αν αυτό μένει ακίνητο γιατί είναι κάπου κολλημμένο), όταν στροβιλίζεται μια σβούρα (παρόλο που παραμένει καρφωμένη στο ίδιο σημείο), όταν ένα θαλάσσιο κύμα προχωρά προς την ακτή (χωρίς να αναφερόμαστε στο ένα ή στο άλλο σημείο του κύματος), υπάρχουν διανυσματικά μεγέθη που περιγράφουν αυτή τη δύναμη που ασκούμε, ή την ιδιοστροφορμή της σβούρας, ή το συγκεκριμένο κυματισμό που απλώνεται σε μεγάλη έκταση πάνω στη θάλασσα, που περιγράφονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και το διάνυσμα της θέσης (π.χ. του γραφείου μου) με μια συντεταγμένη σειρά αριθμών χωρίς όμως τώρα οι αριθμοί αυτοί να υποδηλώνουν κάποια θέση.

Παρά την πολύ ευρύτερη, όμως, χρήση των διανυσμάτων, όπως φάνηκε με τα προηγούμενα παραδείγματα, επειδή ειδικά για τα διανύσματα θέσης μπορούμε να έχουμε μια άμεση εποπτική κατανόηση θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά τέτοια διανύσματα για να εξασκηθούμε στο συμβολισμό τους και στις διανυσματικές κατασκευές μας. Δεν θα πρέπει, όμως, με κανένα τρόπο να ξεχάσουμε ότι αναφερόμαστε σε πολύ γενικότερα αντικείμενα από τα διανύσματα θέσης.

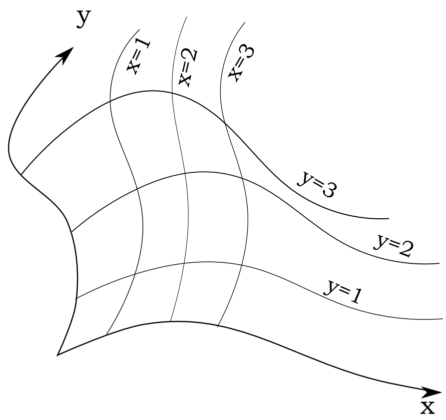
Για αρχή θα εργαστούμε σε μια 2-διάστατη επίπεδη επιφάνεια (όχι συμπαγής σαν τη σφαίρα του προηγούμενου εδαφίου) η οποία θα θεωρήσουμε ότι εκτείνεται επ' άπειρω και θα δούμε εναλλακτικούς τρόπους γραφής της δυάδας αριθμών που περιγράφει μια συγκεκριμένη θέση.

Αρχή: Οι συντεταγμένες μας θα πρέπει να αρχίζουν να μετράνε από κάπου.

Συντεταγμένες: Θα πρέπει κανείς να επιλέξει δύο άξονες (δηλαδή δύο προσανατολισμένες μη παράλληλες ευθείες) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. *Προσοχή*: Δεν είναι απαραίτητο (αν και θα είναι η συνήθης επιλογή μας) οι άξονες να είναι κάθετοι μεταξύ τους. Η καθετότητα θα επιφέρει κάποιες απλοποιήσεις αργότερα, αλλά δεν είναι επιβεβλημένη. Μάλιστα οι "άξονες" θα μπορούσαν να είναι ακόμη και καμπύλες γραμμές, αλλά στο παρόν σύγγραμμα θα αποφύγουμε αυτή την περιπλοκότητα.

Μονάδες μέτρησης: Επί των αξόνων μπορούμε να ορίσουμε κάποια μονάδα μέτρησης, ώστε η αντίστοιχη συντεταγμένη ως αριθμός να σημαίνει τόσες μονάδες. Αν η εν λόγω συντεταγμένη είναι θετική, το σημείο στο οποίο αναφερόμαστε βρίσκεται στην κατεύθυνση προσανατολισμού του άξονα πέρα από την αρχή και στην αντίθετη κατεύθυνση, αν είναι αρνητική. Η μονάδα του κάθε άξονα μπορεί να μην έχει το ίδιο μήκος στους δύο άξονες, αλλά ούτε και πάνω στον κάθε άξονα σε διαφορετικά σημεία αυτού. *Θ*α πρέπει όμως *ο*πωσδήποτε να έχει τις ίδιες διαστάσεις στους δύο άξονες, δηλαδή και οι δύο να έχουν διαστάσεις μήκους, όχι η μια μήκος και η άλλη θερμοκρασία![6]

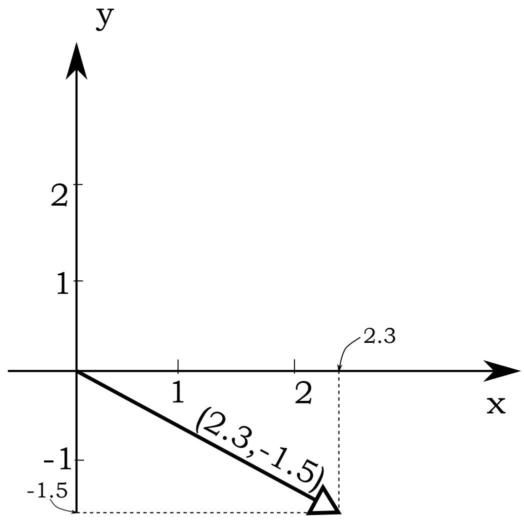
[6]Εδώ θα πρέπει να διακρίνουμε τη χρήση αξόνων για το σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων ενός μεγέθους συναρτήσει κάποιου άλλου. Τα δύο διαφορετικά μεγέθη που παριστάνονται στους δύο άξονες σε αυτή την περίπτωση, μπορούν προφανώς, όντας διαφορετικά, να έχουν και διαφορετικές διαστάσεις. Όμως θα ήταν ανορθόδοξο να ονομάσουμε το ζεύγος συντεταγμένων σε ένα τέτοιο διάγραμμα, διάνυσμα,



Σχήμα 3: Θα μπορούσαν οι "άξονες" να είναι ακόμη και καμπύλες. Όμως, θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους, για παράδειγμα οι καμπύλες $y = y_1$ και $y = y_2$, με $y_1 \neq y_2$, ώστε να υπάρχει μοναδική σηματοδότηση των σημείων. Θυμηθείτε ότι στις γεωγραφικές συντεταγμένες της υδρογείου υπήρχαν δύο τέτοια "ανώμαλα σημεία": οι πόλοι.

Ας δούμε, τώρα, πώς η προηγούμενη κατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε μονοσήμαντα κάποια θέση στο επίπεδο: Έστω ένα σημείο του επιπέδου εκτός των δύο αξόνων. Φέρνουμε ευθείες παράλληλες στους δύο άξονες που διέρχονται από το εν λόγω σημείο και σημαδεύουμε τις τομές αυτών των ευθειών με τους δύο άξονες. Οι συντεταγμένες, δηλαδή οι θέσεις, των τομών με τον κάθε άξονα ως διατεταγμένη δυάδα αριθμών αντιστοιχεί στο σημείο και είναι μοναδική. Για παράδειγμα, στο ακόλουθο σχήμα η θέση του σημείου Α που σημειώνεται με μια βούλα είναι

$$(2.3, -1.5).$$



Σχήμα 4: Το διάνυσμα $(2.3, -1.5)$.

Η διάταξη των δύο αριθμών έχει τεράστια σημασία. Το σημείο $(-1.5, 2.3)$ είναι ένα εντελώς διαφορετικό σημείο. Προφανώς για να σχηματιστεί η ανωτέρω διάταξη θα πρέπει να έχουμε προσυμφωνήσει τη συντεταγμένη ποιανού άξονα θα γράφουμε πρώτη και ποιανού δεύτερη.

Εκτός από τον προσδιορισμό σημείων με την παραπάνω κατασκευή, μπορούμε να

αφού δεν θα είχε νόημα η στροφή των αξόνων η οποία θα ανακάτευε τις διαστάσεις του υποτιθέμενου διανύσματος στο στραμμένο σύστημα (βλ. στο εδάφιο 1.3, όπου συζητιέται η αλλαγή των συντεταγμένων σε στραμμένα συστήματα.)

κατασκευάσουμε και πιο ενδιαφέροντα γεωμετρικά αντικείμενα: τα *διανύσματα*, δηλαδή τα αντικείμενα που έχουν κάποια κατεύθυνση στο χώρο και κάποιο μέγεθος. Στο παράδειγμά μας το διάνυσμα στο οποίο αναφερόμαστε είναι αυτό το γεωμετρικό αντικείμενο που μας δείχνει που βρίσκεται το επίμαχο σημείο Α πάνω στη δισδιάστατη επιφάνεια σε σχέση με την αρχή των αξόνων. Έτσι λοιπόν, με τη γραφή $(2.3, -1.5)$ μπορεί να εννοούμε εκτός από το σημείο και τη θέση του σημείου ως προς την αρχή των αξόνων. Μήπως όμως μπερδευτούμε εννοώντας δύο διαφορετικά πράγματα, το σημείο και τη θέση του σημείου; Η ερώτηση είναι ρητορική και θα λέγαμε ότι ακούγεται λίγο σαν σοφιστεία: από τη στιγμή που έχουμε καθορίσει την αρχή και τους άξονες, το σημείο αυτό καθεαυτό και η θέση του δεν είναι διαφορετικά πράγματα, είναι το ίδιο και το αυτό.[7] Έτσι μπορούμε να γράφουμε

$$\mathbf{r}_A = \vec{r}_A = (2.3, -1.5). \tag{1}$$

Προσέξτε ότι αποδώσαμε στο διάνυσμα θέσης του σημείου Α ένα ιδιαίτερο όνομα, $\mathbf{r}_A$ (ένα παχύ γράμμα) ή $\vec{r}_A$, (ένα γράμμα, το r, με το σύμβολο “ $\vec{}$ ” από πάνω του) το οποίο σηματοδοτεί ένα νέου είδους αντικείμενο, ένα διάνυσμα το οποίο είναι κάτι εντελώς διαφορετικό από ένα μέγεθος που δεν είναι διάνυσμα, π.χ. τη θερμοκρασία του κεφαλιού μου T_κ την ώρα που γράφω αυτές τις γραμμές. Στην περίπτωση της περιγραφής ενός διανύσματος περιμένουμε μια διατεταγμένη N-άδα (στο παράδειγμά μας μια δυάδα) από αριθμούς συνοδευόμενους από κάποια μονάδα μέτρησης (π.χ. cm), ενώ στη δεύτερη περίπτωση, της θερμοκρασίας, έναν μόνο αριθμό συνοδευόμενο από μια μονάδα μέτρησης (π.χ. °C). Ο δε δείκτης $_A$, χρησιμοποιήθηκε ως προσδιοριστικός δείκτης του διανύσματος, προκειμένου να ξεχωρίζει ποιανού σημείου τη θέση καθορίζει το εν λόγω διάνυσμα.

Τα επιστημονικά συγγράμματα και άρθρα συνήθως χρησιμοποιούν τα παχιά γράμματα για να συμβολίσουν διανύσματα. Εμείς, εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε τη γραφή με τα βέλη γιατί είναι πιο εύκολο να γράψει κανείς με το χέρι του διανύσματα με αυτό τον τρόπο και γιατί συνηθίζοντας να τα γράφετε θα αντιλαμβάνεστε καλύτερα και τη σημασία τους. (Θυμηθείτε ότι στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού μαθαίνουμε να γράφουμε τα γράμματα και όχι να τα πληκτρολογούμε. Αυτή ήταν μια διαδικασία κεφαλαιώδους σημασίας για την ανάπτυξη του λόγου.)

Μια εναλλακτική αναπαράσταση του ανωτέρω διανύσματος είναι η

$$\vec{r}_A = 2.3\ \hat{x} + (-1.5)\ \hat{y}\ ,$$

όπου τον πρώτο άξονα τον ονομάσαμε αυθαίρετα άξονα x και τον δεύτερο άξονα y. Τα καπελάκια “ $\hat{}$ ″ που βάλαμε πάνω στις ονομασίες των αξόνων δηλώνουν ότι τα

[7] Βέβαια αργότερα που θα κάνουμε πράξεις με διανύσματα, όπως για παράδειγμα πρόσθεση διανυσμάτων, θα φαινόταν λίγο παράδοξο να μιλάμε για πρόσθεση σημείων, αλλά στην πραγματικότητα η σηματοδότηση του σημείου με αριθμούς απλώς υποδηλώνει τη θέση του ως προς την αρχή των αξόνων, οπότε οι πράξεις που θα κάνουμε θα είναι πράξεις διανυσμάτων θέσης και όχι πράξεις σημείων.

διανύσματα αυτά που κείνται πάνω στους άξονες είναι μοναδιαία διανύσματα, δηλαδή, έχουν μήκος 1. Αυτά καθορίζουν τη μονάδα μέτρησης στον κάθε άξονα.

Μια δεύτερη εναλλακτική αναπαράσταση είναι η

$$\vec{r}_A = \sum_{i=1}^{2} r_i \hat{e}_i = r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 \quad ^8$$

με $r_1 = 2.3$ και $r_2 = -1.5$ και $\hat{e}_i$ τα μοναδιαία διανύσματα στους δύο άξονες: $\hat{e}_1 \equiv \hat{x}$ και $\hat{e}_2 \equiv \hat{y}$. Ο τελευταίος αυτός τρόπος μοιάζει πιο σύνθετος, αλλά όπως θα δούμε αργότερα, είναι ο πιο συνεκτικός και κομψός τρόπος αναπαράστασης των διανυσμάτων, καθώς και ο πιο αποτελεσματικός στη διαχείριση σύνθετων πράξεων με διανύσματα.

Κλείνοντας το παρόν εδάφιο περί γραφής των διανυσμάτων φανταστείτε ένα βιβλίο που θα ξεκινούσε ως εξής:

"Ο Χριστός τελικά τα έχει κάπως χαμένα. ....."

Το πρώτο πράγμα που θα σκεφτόσασταν είναι ότι ο συγγραφέας, ή έστω ο ήρωας του συγγραφέα, μάλλον έχει μια όχι και τόση καλή σχέση με τα θεία. Και αν ο εκδότης κατά τη στοιχειοθεσία του βιβλίου απλώς έβαλε σε λάθος θέση τον τόνο και εννοούσε ο Χρίστος; Η κατάσταση θα ήταν τελείως διαφορετική. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με τη γραφή των φυσικών μεγεθών. Έχει τεράστια σημασία ο σωστός συμβολισμός. Τα διανύσματα, αν γραφούν χωρίς το βέλος που θα υποδηλώνει ότι πρόκειται για διανύσματα, ***δεν είναι*** διανύσματα ακόμη και αν εσείς τα θεωρείτε ως τέτοια. Ο συνομιλητής σας, ή ο αναγνώστης του κειμένου σας, θα καταλάβει ότι δεν αναφέρεστε σε διανύσματα. Ακόμη και εσείς οι ίδιοι ενδέχεται να μπερδευτείτε. Δώστε έμφαση λοιπόν στη σαφήνεια της γραφής για την αποφυγή παρεξηγήσεων.

1.3 Τι είναι διάνυσμα λοιπόν;

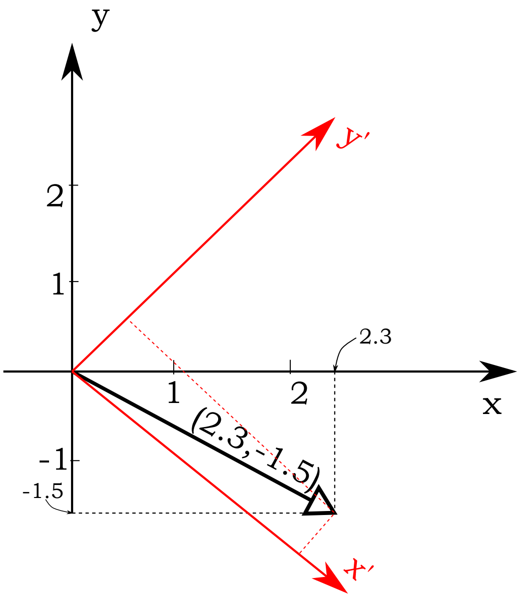
Σύμφωνα με όλα όσα είπαμε στο προηγούμενο εδάφιο, το πιο πιθανό είναι ότι η απάντηση που θα δίνατε είναι πρόκειται για μια διατεταγμένη N-άδα αριθμών. Το $(2.3, -1.5)$ για παράδειγμα είναι ένα διάνυσμα; Όχι. Ένα διάνυσμα είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο που περιγράφει μια φυσική πραγματικότητα (μια θέση ως προς κάποιο σημείο, μια δύναμη, μια επιτάχυνση), αλλά υπάρχει ακόμη και αν δεν έχει κατασκευαστεί ολόκληρο των οικοδόμημα που απαιτείται προκειμένου να περιγραφεί το διάνυσμα. Το διάνυσμα θέσης του σημείου Α ως προς το σημείο Ο (την αρχή των αξόνων) υπάρχει ακόμη και αν δεν σχεδιάσουμε τους άξονες, όπως μια φωτιά στο

[8] Το σύμβολο $\sum_{i=1}^{2}$ σημαίνει άθροιση των ποσοτήτων που ακολουθούν με τον δείκτη i να παίρνει όλες τις τιμές από 1 ως 2.

δάσος υπάρχει προτού τα μέσα ενημέρωσης μας πουν κοντά σε ποιό χωριό έχει εκδηλωθεί αυτή. Το προηγούμενο εδάφιο μας έμαθε, λοιπόν, πώς να αναπαριστούμε και να περιγράφουμε ένα διάνυσμα, όχι, όμως, *τι είναι* αυτό.

Υπάρχουν λοιπόν στοιχεία του διανύσματος που είναι ανεξάρτητα του οικοδομήματος που χρησιμοποιείται για την περιγραφή αυτών; Η απάντηση είναι σαφώς καταφατική και συνδέεται, μάλιστα, με το ότι τα διανύσματα περιγράφουν κάποια φυσική πραγματικότητα. Αν αλλάζοντας τον τρόπο περιγραφής, άλλαζαν τα πάντα, δηλαδή αν το $(2.3, -1.5)$ μπορούσε να περιγραφεί με οποιαδήποτε διατεταγμένη δυάδα επειδή εμείς στήσαμε τους άξονες όπως να' ναι, η Φυσική θα ήταν μια λογιστική καταγραφή άνευ νοήματος. Η πραγματικότητα των διανυσμάτων είναι μπροστά μάτια μας και αυτό θα πρέπει να έχει κάποιο αντίκρυσμα. Το σημείο Α μπορεί να είναι μπροστά από το Ο αν ο παρατηρητής μας στέκεται στο Ο και κοιτάζει προς το Α, ή στο δεξί χέρι του αν ο παρατηρητής στέκεται στο Ο αλλά κοιτάζει αριστερά από την κατεύθυνση που βρίσκεται το Α. Πάντα, όμως, το Α θα βρίσκεται σε απόσταση $\sqrt{2.3^2 + (-1.5)^2}$ (σε μονάδες μήκους που μετράνε οι δύο αριθμοί 2.3 και -1.5) από το Ο.[9]

Η ταυτότητα του διανύσματος $\vec{r}_A$ διατηρείται μέσω της αναλλοιότητας του μήκους του, ανεξαρτήτως του τρόπου αναπαράστασής του (μέσω της κατασκευής των αξόνων). Επιπλέον, όπως θα μάθουμε παρακάτω, δύο ανεξάρτητοι καταγραφείς διανυσμάτων που χρησιμοποιούν διαφορετικό σετ αξόνων μπορούν να συνεννοηθούν μεταξύ τους και να μεταφράζουν το ζεύγος αριθμών που αναπαριστά το εκάστοτε διάνυσμα για τον καθένα, από το σύστημα των αξόνων του ενός στο σύστημα του άλλου. Προφανώς η μετάφραση θα πρέπει να αφήνει το μήκος του διανύσματος αναλλοίωτο και να συμφωνούν και οι δύο για την τιμή αυτού. Επίσης όταν οι δύο αυτοί ανεξάρτητοι καταγραφείς συγκρίνουν δύο διανύσματα θα πρέπει να καταλήγουν σε απολύτως ταυτόσημα συμπεράσματα, εννοώντας ότι το κατασκεύασμα διάνυσμα, ακόμη και αν περιγράφεται με διαφορετικά ζεύγη αριθμών, θα πρέπει να είναι το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο. Αν αυτό δεν ίσχυε και άλλαζαν τα συμπεράσματα από τον ένα παρατηρητή στον άλλο, η Φυσική δεν θα ήταν επιστήμη, αλλά ένα συνονθύλευμα υποκειμενικών περιγραφών της πραγματι-



Σχήμα 5: Το διάνυσμα $(2.3, -1.5)$ αν χρησιμοποιούσαμε άλλο σύστημα συντεταγμένων θα περιγραφόταν με μια διαφορετική δυάδα αριθμών. Το μήκος του όμως θα είναι πάντοτε $\sqrt{2.3^2 + 1.5^2}$.

[9]Σε όλη αυτή τη συζήτηση αναφερόμαστε σε ορθοκανονικά συστήματα αξόνων, στα οποία αναφερόμαστε για να γράψουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος.

κότητας χωρίς καμία αξία. Η φυσική πραγματικότητα έχει αξία ακριβώς γιατί μπορεί να περιγράφει τα πράγματα αντικειμενικά και οι προβλέψεις της να είναι αξιόπιστες.

1.4 Μεταφορά διανυσμάτων

Ένα μεγάλο ερώτημα που ανακύπτει είναι αν τα διανύσματα είναι ελεύθερα αντικείμενα ή είναι δεσμευμένα να σχεδιάζονται σε μια συγκεκριμένη θέση. Το διάνυσμα $\vec{r}_A$ που σχεδιάσαμε με αρχή το Ο και πέρας το Α και μας λέει που βρίσκεται το σημείο Α ως προς το Ο, μπορούμε να το πάρουμε και να το σχεδιάσουμε κάπου αλλού χωρίς να το "πειράξουμε"; Η απάντηση είναι σαφώς ναι. Ο λόγος είναι διπλός. Αφενός το γεγονός ότι το περιγράψαμε και του αποδώσαμε ένα ζευγάρι συντεταγμένων σημαίνει ότι το καταγράψαμε και επομένως το μεταφέρουμε ως πληροφορία οπουδήποτε. Μεταφερόμαστε στην Αγκόλα και λέμε, το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $(2.3, -1.5)$ ως προς το σημείο Ο, όπου και το Ο και το Α βρίσκονται κάπου στην Ελλάδα.[10] Ο δεύτερος λόγος είναι ότι τα διανύσματα, όπως είπαμε, δεν περιορίζονται να περιγράφουν μόνο θέσεις, αλλά και άλλα φυσικά μεγέθη. Επομένως η σύνδεση ενός διανυσματικού μεγέθους με κάποια συγκεκριμένη θέση είναι εντελώς άστοχη. Το εκάστοτε διάνυσμα που περιγράφει κάποιο μέγεθος δεν έχει κανένα δεσμό με το σημείο που το ζωγραφίζουμε.[11] Αυτό ίσως φαίνεται να προκαλεί μια κάποια αμηχανία όταν, για παράδειγμα, έχετε συνηθίσει να σχεδιάζετε τη δύναμη στο σημείο εφαρμογής της. Μάλιστα θα επιμένατε (και καλά θα κάνατε) λέγοντας "... μα αν δεν σχεδιάσω τη δύναμη στο σημείο εφαρμογής της πως θα υπολογίσω της ροπή αυτής;" Η απάντηση είναι ότι για τον υπολογισμό της ροπής χρειάζεται να ξέρω που εφαρμόζεται η δύναμη, γιατί η ροπή περιλαμβάνει, ως πληροφορία, εκτός της δύναμης και τη θέση του σημείου εφαρμογής της. Παρά ταύτα, όμως, όσον αφορά τη δύναμη αυτή καθεαυτή και τις συνέπειες της μέσω του δυναμικού νόμου του Νεύτωνα στη (μεταφορική) κίνηση του σώματος, μας είναι αδιάφορο το σημείο εφαρμογής της.

Με άλλα λόγια, μπορούμε να φανταζόμαστε τα διανύσματα ως γεωμετρικά αντικείμενα (με φυσικό ενδιαφέρον) τα οποία έχουμε την ελευθερία να τα μεταφέρουμε "πιστά" όπου θέλουμε. Δηλαδή να τα μεταφέρουμε χωρίς να αλλοιώνουμε αυτό που περιγράφουν. Στη γλώσσα των μαθηματικών λέμε ότι τα φυσικά διανύσματα ζουν σε

[10] Υπάρχει βέβαια ένα τεχνικό ζήτημα του πως θα περιγράψουμε τους άξονες που χρησιμοποιήσαμε στην περιοχή του σημείου Ο για να καθοδηγήσουμε κάποιον στην Αγκόλα να καταλάβει που "πέφτει" το Α σύμφωνα με τις δοθείσες συντεταγμένες. Αλλά ας απλοποιήσουμε λίγο τα παράγματα ακολουθώντας την υπόθεση εργασίας ότι η Γη είναι επίπεδη και επομένως οι κατευθύνσεις των αξόνων στο Ο, στο Α και στην Αγκόλα δεν διαφοροποιούνται.

[11] Προσοχή: Κάποιο διανυσματικό μέγεθος μπορεί να αλλάζει από σημείο σε σημείο και επομένως, όταν το σχεδιάζουμε, αναφερόμαστε στο εν λόγω σημείο (π.χ. η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου, όταν αυτό περνάει από τη Λαμία είναι $(23, -15)$ km/h, αλλά η ταχύτητα αυτή είναι ελεύθερη να σχεδιαστεί όπου θέλουμε, προκειμένου να τη συγκρίνουμε με την ταχύτητα του φορτηγού που διερχόταν από το αντίθετο ρεύμα για να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τη σφοδρότητα της σύγκρουσης που επακολούθησε.)

έναν affine[12] διανυσματικό χώρο, όπου δεν έχει κάποια ιδιαίτερη σημασία η αρχή των αξόνων, αφού, όπου και να τα σχεδιάσουμε, τα διανύσματα είναι κατ' ουσίαν τα ίδια.

1.5 Άθροιση (διαφορά) διανυσμάτων

Τώρα αρχίζουν τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα, όσον αφορά στη χρήση των διανυσμάτων, όπως και με τους απλούς αριθμούς: πέραν της δυνατότητάς μας να συνενοούμαστε μετρώντας το πλήθος των αντικειμένων, μπορούμε και να εκτελέσουμε πράξεις που οδηγούν σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα ότι το άθροισμα των αρμονικών όρων

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

μπορεί να ξεπεράσει οποιονδήποτε αριθμό αν το n επιλεχθεί αρκούντως μεγάλο.

Θα ξεκινήσουμε με την πρόσθεση διανυσμάτων και θα δούμε παραδείγματα φυσικών διανυσματικών ποσοτήτων, η πρόσθεση των οποίων έχει ενδιαφέρουσα ερμηνεία.

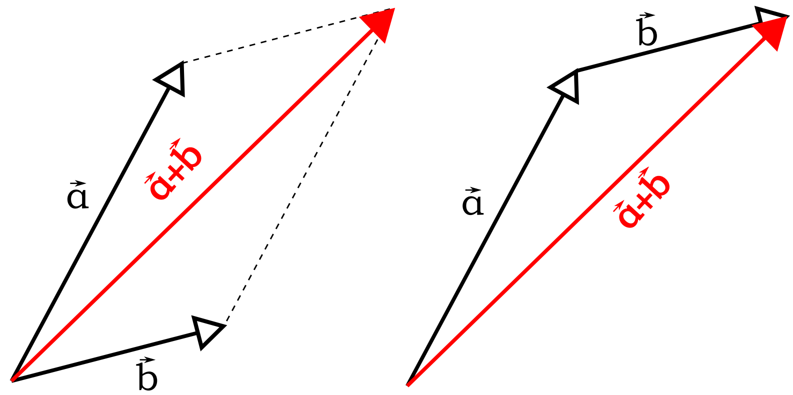
Όταν προσθέτουμε δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ προκύπτει ένα νέο διάνυσμα, η κατασκευή του οποίου μπορεί να υλοποιηθεί με δύο ισοδύναμους τρόπους: (i) Σχεδιάζοντας τα διανύσματα με κοινή αρχή (δηλαδή μεταφέροντάς τα ώστε οι αρχές τους να συμπίπτουν), κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο του οποίου οι δύο μη παράλληλες πλευρές αντιστοιχούν στα δοθέντα διανύσματα και στο τέλος σχεδιάζουμε το διάνυσμα με αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων και πέρας την κορυφή του παραλληλογράμμου απέναντι από την κοινή αρχή (δηλαδή το διάνυσμα που διατρέχει τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που διέρχεται από την κοινή αρχή), (ii) Μεταφέροντας την αρχή του δεύτερου[13] διανύσματος στο τέλος του πρώτου. Τότε το διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του δεύτερου αντιπροσωπεύει το άθροισμα των δύο διανυσμάτων. Καταρχάς είναι αυτονόητο ότι οι παραπάνω δύο κατασκευές είναι ακριβώς ισοδύναμες: ένα είναι το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα δύο διανύσματα, είτε αυτά έχουν κοινή αρχή, είτε είναι τοποθετημένα ως κάμπιες το ένα πίσω από το άλλο. Αξίζει να σημειώσουμε βέβαια ότι η δεύτερη κατασκευή έχει πλεονεκτήματα, όταν πρόκειται να προσθέσουμε περισσότερα των δύο διανυσμάτων, αφού τότε χρειάζεται απλώς να τα τοποθετήσει κανείς στη σειρά το ένα μετά από το άλλο.

Ο Νεύτωνας, στο περίφημο βιβλίο του Principia[14] που αποτέλεσε σταθμό στην ιστορία της Φυσικής, προτού διατυπώσει τους νόμους του παραθέτει μια σειρά χρηστικών προτάσεων, μεταξύ των οποίων και αυτή που λέει ότι δύο δυνάμεις όταν δρουν ταυτόχρονα σε ένα σώμα μπορούν να αντικατασταθούν από μια δύναμη κατά μήκος της

[12] Στα ελληνικά δεν υπάρχει καλά καθιερώμενη μετάφραση του όρου και χρησιμοποιείται συχνά το ηχητικό *αφινικός*, ή συσχετισμένος (εννοώντας με την αρχή), αλλά μάλλον ο όρος *ορφανός* θα ήταν πιο κοντά στην πραγματική του σημασία.

[13] Δεν έχει σημασία ποιο θα είναι πρώτο και ποιο δεύτερο.

[14] Ολοκληρωμένος τίτλος Plilosophiae Naturalis Principia Mathematica.



Σχήμα 6: Διαγραμματική κατασκευή πρόσθεσης διανυσμάτων.

διαγωνίου του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν οι άλλες δύο. Με την πρόταση αυτή αναγνωρίζει εμμέσως την διανυσματικότητα[15] του μεγέθους δύναμη.

Και τώρα ας δούμε την εξήγηση πίσω από τις παραπάνω κατασκευές. Ας εργαστούμε με διανύσματα θέσης και ας δεχτούμε ότι και τα άλλα διανυσματικά μεγέθη, όπως η δύναμη ή η ταχύτητα, προστίθενται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Αν $\vec{a}$ συμβολίζει τη θέση του σημείου A ως προς το O, και $\vec{b}$ τη θέση του σημείου B ως προς το A, τότε προφανώς αν τα τοποθετήσουμε το $\vec{a}$ με αρχή το O και πέρας το A, και το $\vec{b}$ με αρχή το A και πέρας το B (δηλαδή το ένα πίσω από το άλλο), το διάνυσμα $\vec{c}$ που έχει αρχή το O (την αρχή του $\vec{a}$) και πέρας το B (το πέρας του $\vec{b}$) θα διαγράφει τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$ και θα αντιστοιχεί στο άθροισμα

$$\vec{a} + \vec{b}\,.$$

Με άλλα λόγια η έννοια της πρόσθεσης των δύο διανυσμάτων θέσης είναι η ακόλουθη: Πήγαινε από το O στο A (δηλαδή εκτέλεσε τη μετατόπιση OA που υποδηλώνει το διάνυσμα $\vec{a}$) και στη συνέχεια μετακινήσου κατά τη μετατόπιση AB που υποδηλώνει το διάνυσμα $\vec{b}$. Πρόκειται για μια διαδοχική σειρά μετατοπίσεων.

Είναι αξιοσημείωτο ότι το άθροισμα των διανυσμάτων δεν αλλάζει, αν αλλάξουμε τη σειρά αυτών: θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με το $\vec{b}$ και σε αυτό να προσθέσουμε (ξεκινώντας από τη μύτη του) το $\vec{a}$. Αν και η σημείωση αυτή είναι τετριμένη καλό είναι να γνωρίζουμε γενικά σε ποιες περιπτώσεις πράξεων η σειρά εκτέλεσης της πράξης αλλάζει το αποτέλεσμα.[16]

[15]Τα διανύσματα είναι μια πολύ μεταγενέστερη έννοια, οπότε ο Νεύτωνας δεν λέει πουθενά ότι οι δυνάμεις είναι διανυσματικά μεγέθη.

[16]Κατ' αναλογία με τους αριθμούς, η αφαίρεση διανυσμάτων αλλάζει το αποτέλεσμα ανάλογα ποιο διάνυσμα θα αφαιρέσουμε από ποιο, ενώ η πρόσθεση όχι.

Σε επίπεδο συντεταγμένων και όχι αφηρημένων διανυσμάτων, η πρόσθεση των διανυσμάτων είναι εξαιρετικά εύκολη. Απλώς προσθέτουμε τις επί μέρους συντεταγμένες, π.χ.

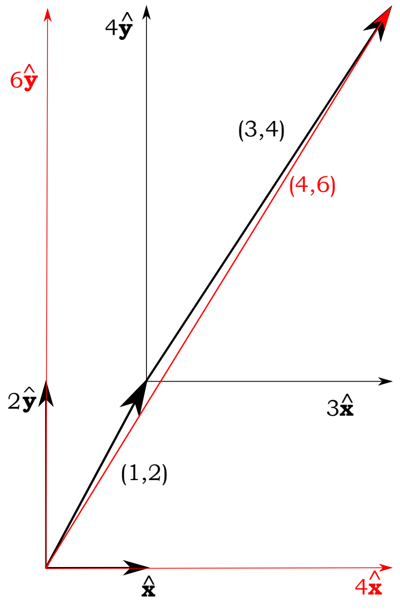
$$(1,2) + (3,4) = (1+3, 2+4) = (4,6)$$

αναφερόμενοι σε δισδιάστατα διανύσματα. Γενικότερα μπορούμε να πούμε ότι

$$\vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i)\hat{e}_i$$

για διανύσματα, ενός N-διάστατου χώρου. Το γιατί οι επί μέρους συντεταγμένες προστίθενται είναι απλό: Όταν κατασκευάζουμε τα διανύσματα, το ένα μετά το άλλο, οι συντεταγμένες τους κατά μήκος των δύο (ή περισσοτέρων) αξόνων είναι διαδοχικοί αριθμοί, των οποίων η πρόσθεση οδηγεί στην αντίστοιχη τιμή της συντεταγμένης του αθροίσματος (βλ. σχήμα). Μέσω των συντεταγμένων είναι πολύ καθαρό πλέον γιατί η πρόσθεση διανυσμάτων, όπως ορίστηκε, είναι μεταθετική πράξη.

Άσκηση: Ελέγξτε αν η πρόσθεση γεωγραφικών πλατών και γεωγραφικών μηκών οδηγεί στο ίδιο σημείο ανεξαρτήτως της σειράς που γίνονται οι δύο μετατοπίσεις. Επίσης ελέγξτε αν η μετατόπιση από ένα σημείο σε ένα άλλο πάνω στην υδρόγειο και μετά από αυτό σε ένα δεύτερο, οδηγεί στο ίδιο τελικά σημείο αν προσθέσουμε απλώς τα δύο γεωγραφικά μήκη και πλάτη των δύο μετατοπίσεων.



Σχήμα 7: Πρόσθεση διανυσμάτων.

Ολοκληρώνοντας τα περί πρόσθεσης διανυσμάτων, θα πρέπει να τονίσουμε ότι *δεν* έχουμε το δικαίωμα να προσθέσουμε δύο διανυσματικά μεγέθη, *αν* αυτά δεν είναι ομοειδή, δηλαδή αν δεν αναφέρονται σε φυσικά διανυσματικά μεγέθη ίδιου τύπου π.χ. θέσεις, ορμές, δυνάμεις κλπ. Μέσω της πρόσθεσης δύο η περισσότερων διανυσμάτων, βρίσκουμε το συνολικό διάνυσμα που αντιπροσωπεύει όλα τα προστιθέμενα διανύσματα. Έτσι βρίσκουμε για παράδειγμα τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα από την πρόσθεση όλων των επί μέρους δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό, ή την ολική ορμή ενός συστήματος που αποτελείται από πολλά κινούμενα μέρη προσθέτωντας τις ορμές όλων αυτών.

Επίσης *δεν* μπορούμε να προσθέσουμε τις επί μέρους συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων, αν αυτές δεν αναφέρονται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Αν κάνουμε κάτι τέτοιο είναι πολύ χειρότερο από το να μιλάμε σε γκρικγκλις. Το αποτέλεσμα δεν είναι απλώς αισθητικά κακό, είναι *εντελώς λάθος*.

Η αφαίρεση διανυσμάτων είναι εξαιρετικά απλή, αν εισάγουμε την έννοια του αντίθετου διανύσματος $(-\vec{a})$ δηλαδή του διανύσματος που απαιτείται να προσθέσουμε σε ένα διάνυσμα $(\vec{a})$ προκειμένου να λάβουμε το μηδενικό διάνυσμα. Το αντίθετο ενός διανύσματος είναι ένα διάνυσμα με αντίθετες συντεταγμένες από το αρχικό: Αν $\vec{a} = (2, -3) = 2\hat{x} - 3\hat{y}$, τότε το αντίθετό του είναι $-\vec{a} = (-2, 3) = -2\hat{x} + 3\hat{y}$. Με τη χρήση λοιπόν του αντίθετου διανύσματος μπορούμε να σχηματίσουμε τη διαφορά δύο δανυσμάτων

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Άσκηση: Προσθέστε $2N$ διανύσματα που έχουν όλα ως αρχή το κέντρο ενός κανονικού πολυγώνου και πέρατα τις διαδοχικές κορυφές αυτού. Τώρα επιλέξτε ως αρχή όλων ένα σημείο Α εκτός του κέντρου του πολυγώνου, τέτοιο ώστε $\vec{OA} = \vec{r}_0$ και επαναλάβετε την άθροιση. Στη συνέχεια, κάθε δεύτερο διάνυσμα αντιστρέψτε το και επαναλάβετε την άθροιση.

Κλείνοντας, ας πούμε και δύο λόγια για το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$, μιας και αναφέρθηκε προηγουμένως. Πρόκειται για ένα ιδιαίτερο διάνυσμα του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι μηδενικές, η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν και επομένως δεν έχει ούτε φορά ούτε κατεύθυνση. Παρά ταύτα διατηρεί τη διανυσματική του ταυτότητα, είναι απλά ένα ξεχωριστό διάνυσμα.

Η πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων ορίζει μια *ομάδα* (group), όπως αναφέρεται στα μαθηματικά, και μάλιστα αβελιανή (λόγω της μεταθετικότητας των δύο προσθετέων διανυσμάτων). Η έννοια της ομάδας στη Φυσική έχει εξέχουσα σημασία γιατί ομαδοποιεί φυσικές διεργασίες και στη δομή της εμπεριέχει όλες τις συμμετρίες που κρύβει αυτή. Εν συντομία θα αναφέρουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων που την καθιστούν ομάδα: (i) Αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι διανύσματα ενός συγκεκριμένου N-διάστατου χώρου, τότε το $\vec{a}+\vec{b}$ είναι και αυτό ένα διάνυσμα του ίδιου χώρου, (ii) η πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων είναι προσεταιριστική, δηλαδή δεν έχει σημασία η σειρά που θα εκτελέσουμε την πρόσθεση τριών διανυσμάτων (πρώτα θα προσθέσουμε τα δύο πρώτα ή πρώτα τα δύο τελευταία): $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + (\vec{b}) + \vec{c})$, (iii) υπάρχει ένα ιδιαίτερο διάνυσμα, το $\vec{0}$ το οποίο αν προστεθεί σε οποιοδήποτε διάνυσμα δεν το αλλάζει, (iv) σε κάθε διάνυσμα $\vec{a}$, αντιστοιχεί ένα νέο διάνυσμα το $-\vec{a}$, τέτοιο ώστε $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, και τέλος (v) δεδομένης της μεταθετικότητας της πρόσθεσης διανυσμάτων $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, η εν λόγω ομάδα είναι, όπως προαναφέραμε αβελιανή (μεταθετική).

Αν και σε όλη τη συζήτηση αποφύγαμε εντέχνως να ορίσουμε αφηρημένες μαθηματικές οντότητες με κάποια ιδιαίτερη δομή, ίσως τώρα ήρθε η στιγμή μετά την ανάδειξη της *"ομαδικής"* συμπεριφοράς των διανυσμάτων, να αναφερθούμε και στον "*διανυσματικό χώρο*" στον οποίο ζουν τα διανύσματα. Όχι, όμως, για να γεμίσουμε το κεφάλι μας με όρους που θα μας δίνουν την ψευδαίσθηση ότι μιλάμε επιστημονικά, αλλά για να μπορούμε να συνεννοηθούμε πιο εύκολα. Ο διανυσματικός χώρος των διανυσμάτων χαρακτηρίζεται από κάποια *διάσταση* που δηλώνει το πλήθος των συνιστωσών ενός διανύσματος. Ακόμη και αν εμείς δεν είμαστε σε θέση να ζωγραφίσουμε έναν χώρο με περισσότερες από 3 διαστάσεις, αυτό δεν σημαίνει πως δεν έχει κανένα νόημα να μιλάμε για τέτοιους χώρους: κλασικότερο παράδειγμα ο τετραδιάστατος χώροχρονος, ή ο απειροδιάστατος χώρος Hilbert της κβαντομηχανικής στον οποίο ζουν οι διάφορες κυματοσυναρτήσεις. Το δε επίθετο "γραμμικός" σε έναν τέτοιο χώρο, υποδηλώνει τη γραμμικότητα της πρόθεσης δύο διανυσμάτων όταν αυτά προστίθενται: $\lambda(a_1,a_2)+\mu(b_1,b_2)=(\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2)$. Μπορεί στη συνέχεια να φανταστεί υπόχωρους ενός διανυσματικού χώρου (δηλαδή μικρότερης διάστασης γραμμικούς χώρους) που εμπεριέχοναι σε έναν διανυσματικό χώρο. Για παράδειγμα ένα επίπεδο (δισδιάστατος διανυσματικός χώρος) μέσα στον τρισδιάστατο χώρο, στο οποίο ζουν μερικά από τα διανύσματα του τρισδιάστατου χώρου, ενώ άλλα διανύσματα βρίσκονται εκτός του επιπέδου, τέμνοντας, απλώς, το επίπεδο αυτό.

Τέλος σε κάθε διανυσματικό χώρο χρειαζόμαστε μια *βάση*, δηλαδή ένα σύνολο διανυσμάτων ικανών να περγράψουν κάθε διάνυσμα του χώρου ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης. Είναι σχεδόν προφανές ότι το απαιτούμενο πλήθος των διανυσμάτων βάσης είναι όσο και η διάσταση του διανυσματικού χώρου, αφού με λιγότερα θα περιγράφαμε έναν υπόχωρο του αρχικού χώρου, ενώ με περισσότερα θα είχαμε πολλαπλές αναπαραστάσεις του ίδιου διανύσματος: για παράδειγμα σε διανυσματικό χώρο μιας διάστασης ο αριθμός 5 μπορεί να γραφεί ως $3\times\mathbf{1}+1\times\mathbf{2}$ ή ως $1\times\mathbf{1}+2\times\mathbf{2}$, όπου οι αριθμοί με τα παχιά γράμματα $\mathbf{1},\mathbf{2}$ μπορούν να θεωρηθούν ως βάση για την περιγραφή των διανυσμάτων (αριθμών) σε μία ευθεία.

1.6 Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

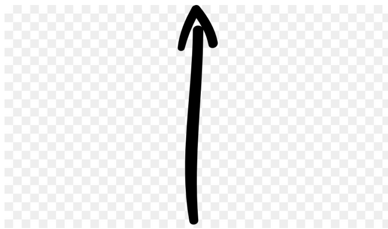
Αν και ο τρόπος άθροισης (ή διαφοράς) διανυσμάτων είναι σχεδόν αυτονόητος (απλώς γίνεται άθροιση των επί μέρους συντεταγμένων), ο πολλαπλασιασμός θα επιτευχθεί με πολλαπλούς τρόπους. Ας ξεκινήσουμε από εκείνο τον είδος του πολλαπλασιασμού που είναι τόσο αυτονόητος όσο και η άθροιση διανυσμάτων.

Τι θα έλεγε ένα μικρό παιδί αν του σχεδιάζες ένα βέλος και του ζητούσες να σου σχεδιάσει ένα βέλος διπλάσιο του πρώτου; Θα έφτιαχνε ένα βέλος με την ίδια διεύθυνση και φορά με το πρώτο, αλλά με διπλάσιο μήκος.[17] Με άλλα λόγια πολλαπλασιάζοντας

[17] Πιθανώς ο παιδί να άλλαζε και τη διεύθυνση αντιμετωπίζοντας τα βέλη ως αντικείμενα μη έχοντα

ένα διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό, το μόνο που χρειάζεται είναι να πολλαπλασιαστεί το μήκος του με αυτό τον αριθμό, χωρίς να πειραχτεί η κατεύθυνσή του. Αυτό εξάλλου θα ήταν και συμβατό με την έννοια της φράσης “διπλάσιο”, δηλαδή δύο φορές το αρχικό, δηλαδή σύμφωνα με την πρόσθεση διανυσμάτων: “ένα διάνυσμα συν άλλο ένα ίδιο διάνυσμα”.

Δεν είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς ότι οι συντεταγμένες του διανύσματος που πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό λ θα σχηματίζονται από τις αρχικές συντεταγμένες του διανύσματος πολλαπλασιασμένες με αυτό το κοινό νούμερο, λ, αφού η αναλογίες των συντεταγμένων και όχι οι τιμές τους αυτές καθεαυτές καθορίζουν τη διεύθυνση του διανύσματος. Επομένως αν $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$,



$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Να σημειώσουμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα δεν σημειώνεται με κανένα σημάδι ακολουθώντας την οικονομική πρακτική που μάθαμε να ακολουθούμε στο γυμνάσιο όταν πολλαπλασιάζαμε δύο αριθμούς. Αν και η παρατήρηση αυτή μοιάζει κοινότυπη, θα δείτε ότι ο πολλαπλασιασμός διανυσμάτων, γενικότερα, δεν μας αφήνει περιθώρια για τόσο απλοϊκές λύσεις συμβολισμού.

Άσκηση: Δείξτε ότι το μέτρο του διανύσματος $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ είναι πράγματι $|\lambda|$-πλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{a}$.

Προφανώς αν ο πολλαπλασιαστικός παράγων είναι αρνητικός, η φορά του διανύσματος αντιστρέφεται χωρίς να πειραχτεί η διεύθυνσή του.

Οι δύο πράξεις που μάθαμε (άθροιση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα) είναι αρκετές για να χτιστεί μια ολόκληρη δομή, αυτή ενός διανυσματικού χώρου, όπως σημειώσαμε στο τέλος του προηγούμενου εδαφίου.

1.7 Πολλαπλασιασμός μεταξύ διανυσμάτων

Σε πρώτο επίπεδο θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς αν έχει καν νόημα ο πολλαπλασιασμός μεταξύ διανυσμάτων κατ᾽αναλογία με το αν έχει νόημα ο πολλαπλασιασμός μεταξύ μήλων! Τα διανύσματα είναι, όπως έχουμε πει νέα αντικείμενα, διαφορετικά από τους αριθμούς (πιο σωστά, από τα βαθμωτά μεγέθη που περιγράφονται με αριθμούς). Έλα όμως που και αυτά τα νέα αντικείμενα περιγράφονται μέσω αριθμών και όχι μέσω μήλων... Ίσως και να μπορεί να κατασκευάσει κανείς πολλαπλασιασμούς

παραπάνω σημασία από το σχήμα τους. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να το ωθήσουμε στην σωστή λύση τονίζοντάς του να είναι “ακριβώς” σαν το πρώτο...

διανυσμάτων, αλλά τι θα είναι αυτά; Βαθμωτά, διανύσματα ή νέα αντικείμενα; Η απάντηση είναι: μπορεί να είναι οτιδήποτε από τα προαναφερθέντα. Οι πολλαπλές αυτές δυνατότητες πολλαπλασιασμού θα είναι το επόμενο σημείο της ανάλυσής μας.

Ας εκτελέσουμε διάφορες δοκιμές πολλαπλασιασμού:

Απόπειρα 0: Έστω

$$(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = a_1 a_2 b_1 b_2 \ .$$

Πράγματι φτιάξαμε ένα νέο αριθμό (μονόμετρο) που προέκυψε από πολλαπλασιασμό των διαθέσιμων συντεταγμένων. Στην κατασκευή αυτή θα εγείραμε την ακόλουθη αντίρρηση: Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς το αποτέλεσμα θα θέλαμε να διπλασιάζεται αν διπλασιάσουμε τον ένα εξ αυτών (όπως συμβαίνει και με τους αριθμούς). Στην παραπάνω ψευτοκατασκευή πολλαπλασιασμού το αποτέλεσμα τετραπλασιάζεται, αν διπλασιάσουμε το ένα από τα δύο διανύσματα!

Απόπειρα 1: Έστω τώρα

$$(a_1, a_2) \star_1 (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \ .^{18} \tag{3}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν πάσχει από τα προβλήματα της προηγούμενης απόπειρας. Επιπλέον διαθέτει ένα τεράστιο πλεονέκτημα που δεν θα το αποδείξουμε ακόμη: Όπως και αν στήσουμε το σύστημα των αξόνων για να βρούμε τις συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων, το αποτέλεσμα θα βγεί ακριβώς το ίδιο! Ας το δούμε αυτό με ένα παράδειγμα. Έστω το διάνυσμα $\vec{a} = (a, 0)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Θα είναι

$$(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = a\ b_1 + 0 \cdot b_2 = a \cdot b_1 \ .$$

Αν, τώρα, χρησιμοποιήσουμε ως νέο άξονα x' τον φορέα του $\vec{b}$ με την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{b}$ (και τον κάθετο σε αυτόν άξονα y'), τότε το μεν διάνυσμα $\vec{b}$ θα λάβει τη μορφή $(|\vec{b}|, 0)$ το δε διάνυσμα $\vec{a}$ θα λάβει τη μορφή $(a\cos\theta, -a\sin\theta)$ (βλ. σχήμα). Είναι εύκολο να δείτε ότι αν επαναϋπολογίσετε το ανωτέρω γινόμενο στο νέο σύστημα αξόνων θα λάβετε

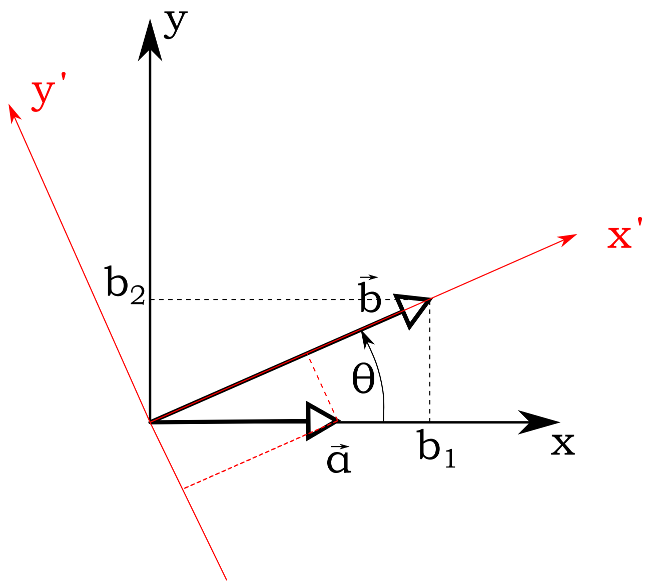
$$(a'_1, a'_2) \star (b'_1, b'_2) = a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 = (a\cos\theta)|\vec{b}| - (a\sin\theta) \cdot 0 = a(\cos\theta|\vec{b}|) = a \cdot b_1 \ .$$

Ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με προηγουμένως! Αυτό είναι αξιοσημείωτο και μάλιστα μόνο μια πράξη που έχει αυτή την ιδιότητα έχει νόημα να οριστεί.[19] Ας δούμε γιατί.

Όταν εκτελούμε πράξεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων κατασκευάζουμε νέες φυσικές ποσότητες, ή, στην απλούστερη περίπτωση, ίδιες (από πλευράς διαστάσεων) φυσικές

[18] Στο σύμβολο $\star$ του γινομένου βάλαμε κάποιο δείκτη, και το ίδιο θα κάνουμε και στον ορισμό ενός άλλου εναλλακτικού γινομένου αργότερα, προκειμένου να διακρίνουμε τους ορισμούς μεταξύ τους.

[19] Ομολογουμένως δεν δοκιμάσαμε την τιμή αυτού του γινομένου σε κάθε δυνατό σύστημα συντεταγμένων. Όπως θα δούμε όμως σε μεταγενέστερο κεφάλαιο, αυτό των μετασχηματισμών, το γινόμενο αυτό είναι πράγματι αναλλοίωτο.



Σχήμα 9: Υπολογισμός κάποιου γινομένου βάσει της 3.

ποσότητες με τις αρχικές. Τα αποτελέσματα που θα πάρουμε όταν εκτελέσουμε πράξεις μεταξύ διανυσματικών μεγεθών (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή ότι άλλο μπορούμε να κατασκευάσουμε) θα πρέπει να σχετίζεται με τα διανύσματα αυτά καθεαυτά και όχι με την αναπαράσταση τους με διατεταγμένες N-άδες αριθμών-συντεταγμένων, οι οποίες διαφοροποιούνται αν αλλάξουμε τους άξονες του συστήματος αναφοράς. Προφανώς οι συντεταγμένες θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της πράξης, αλλά το αποτέλεσμα αυτό θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο των συντεταγμένων, αφού και τα διανύσματα έχουν αυθύπαρκτη ταυτότητα, ανεξάρτητα του συστήματος αναφοράς. Στην προηγούμενη παράγραφο προσπαθήσαμε να κατασκευάσουμε κάποιου είδους γινόμενο διανυμάτων το οποίο θα οδηγούσε σε ένα νούμερο, δηλαδή, σε ένα βαθμωτό μέγεθος. Αλοίμονό μας αν το νούμερο αυτό άλλαζε με την αλλαγή του συστήματος αναφοράς που θα χρησιμοποιούσαμε για να περιγράψουμε τα πολλαπλασιαζόμενα διανύσματα.

Για να γίνει αυτό καλύτερα αντιληπτό, ας δοκιμάσουμε ακόμη μια “πιθανή” επιλογή πολλαπλασιασμού διανυσμάτων που θα οδηγούσε σε μονόμετρο μέγεθος (έναν αριθμό).

Απόπειρα 2: Έστω

$$(a_1, a_2) \star_3 (b_1, b_2) = a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1. \tag{4}$$

Η κατασκευή αυτή θα είχε όλα τα εχέγγυα να αναπαριστά γινόμενα διανυσμάτων, αφού ο διπλασιασμός του ενός (οποιουδήποτε από τα δύο) διανύσματος θα διπλασίαζε το αποτέλεσμα. Επομένως το γινόμενο αυτό θα οδηγούσε στο

$$(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = a\, b_2 + 0 \cdot b_1 = a|\vec{b}| \sin\theta\ ,$$

αλλά στο τονούμενο (κόκκινο) σύστημα θα οδηγούσε στο

$$(a'_1, a'_2) \star (b'_1, b'_2) = a'_1 \cdot 0 + a'_2\, |\vec{b}| = (-a \sin\theta)|\vec{b}| = -a|\vec{b}| \sin\theta\ .$$

Το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό και επομένως μια τέτοια πράξη θα είχε ως αποτέλεσμα να παίρνουμε σχεδόν ότι θέλουμε από τον πολλαπλασιασμό αυτό, ανάλογα με το πώς θα στήναμε το σύστημα αναφοράς για να αναλύσουμε τα διανύσματα.

Άσκηση: Ελέγξτε κατά πόσο ένας πολλαπλασιασμός διανυσμάτων που θα οριζόταν ως

$$(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = 2a_1\; b_1 + a_2 \cdot b_2$$

είναι ικανοποιητικός.

Επομένως το άμεσο συμπέρασμα που βγάζουμε, είναι ότι το γινόμενο διανυσμάτων, όπως ορίστηκε στην (3) είναι το μοναδικό βαθμωτό μέγεθος (αν εξαιρέσει κανείς έναν αυθαίρετο αλλά σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα που θα μπορούσε να επιβάλει επιπλέον στο αποτέλεσμα); Πολύ βιαστικό ένα τέτοιο συμπέρασμα. Δοκιμάσαμε, αλήθεια, κάθε δυνατή επιλογή για να καταλήξουμε στην (3);

Ας πάρουμε τα πράγματα λίγο πιο συστηματικά. Θα κατασκευάσουμε τη γενικότερη βαθμωτή ποσότητα που φτιάχνεται από γινόμενα συνιστωσών των επί μέρους διανυσμάτων, ώστε να συμπεριφέρεται γραμμικά ως προς τον πολλαπλασιασμό του κάθε διανύσματος με κάποιο νούμερο:

$$(a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = \lambda_{11} a_1 b_1 + \lambda_{12} a_1 b_2 + \lambda_{21} a_2 b_1 + \lambda_{22} a_2 b_2 \tag{5}$$

και θα ζητήσουμε κατάλληλους συντελεστές $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$ ώστε η ποσότητα αυτή να μένει αμετάβλητη σε αλλαγές του συστήματος των συντεταγμένων. Καταρχάς θα δημιουργήσουμε μια έντεχνα συμμετρική ανασύνταξη των όρων (επειδή οι φυσικοί αγαπάμε και εκτιμούμε ιδιαίτερα τις συμμετρίες):

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \star_{12} (b_1, b_2) &= \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2) \\ &+ \frac{\lambda_{11} - \lambda_{22}}{2}(a_1 b_1 - a_2 b_2) \\ &+ \frac{\lambda_{12} + \lambda_{21}}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &+ \frac{\lambda_{12} - \lambda_{21}}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1)\ .\end{aligned}$$

Πώς τη σκεφτήκαμε; Απλώς αναγνωρίσαμε στο αρχικό κατασκεύασμα (της 5) συνδυασμούς παραγόντων που δοκιμάσαμε πριν και συμπεριφέρονταν σε αλλαγές συντεταγμένων καλά (3) ή κακά (4), οπότε δημιουργήσαμε μερικούς ακόμη προς έλεγχο.

Αν δοκιμάζε κανείς να ελέγξει πώς συμπεριφέρεται ο 2ος συνδυασμός $(a_1, a_2) \star_2 (b_1, b_2) = a_1 b_1 - a_2 b_2$ θα διαπίστωνε ότι παίρνει την τιμή $a|\vec{b}|\cos\theta$ και στο άτονο και στο τονούμενο σύστημα συντεταγμένων. Η αναλλοιότητα αυτή όμως είναι δυστυχώς φαινομενική. Αν στρίβαμε και άλλο το τονούμενο σύστημα, τόσο ώστε ο άξονας x' να κοιτάζει κάθετα στο $\vec{a}$, η ποσότητα αυτή θα λάμβανε την τιμή $-a|\vec{b}|\cos\theta$.

Τέλος, αν δοκιμάσει κανείς πως συμπεριφέρεται ο 4ος συνδυασμός

$$(a_1, a_2) \star_4 (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ ,$$

θα διαπίστωνε ότι και αυτός είναι αναλλοίωτος, το αποτέλεσμά του είναι για όλα τα συστήματα συντεταγμένων $a|\vec{b}|\sin\theta$. Αν, όμως, το τονούμενο σύστημα είχε ανάποδα τους άξονες του,ώστε ο άξονας x' να συμπίτει με τον y και ο άξονας y' να συμπίπτει με τον x, η ποσότητα αυτή θα λάμβανε την τιμή $-a|\vec{b}|\sin\theta$. Κανείς δεν μας μίλησε για καλά και για κακά ορθοκανονικά συστήματα! Επιπλέον ένα τέτοιο γινόμενο αλλάζει πρόσημο σε εναλλαγή των δύο διανυσμάτων[20]. Είναι όπως θα λέγαμε ένα αντισυμμετρικό γινόμενο με

$$(a_1, a_2) \star_4 (b_1, b_2) = -(b_1, b_2) \star_4 (a_1, a_2) \ .$$

Αν προσέχαμε το αποτέλεσμα αυτού του γινομένου, $a|\vec{b}|\sin\theta$, θα μας έβαζε σε υποψίες αντισυμμετρικότητας η ύπαρξη του sin και το περιττό της εν λόγω συνάρτησης. Σε αντίθεση, το γινόμενο της 3, μέσω του cos, περιμένει κανείς να έχει συμμετρική συμπεριφορά λόγω αρτιότητας της συνάρτησης cos.

Συνοψίζουμε: Κατασκευάσαμε μία μόνο δυνατή μορφή αναλλοίωτου γινομένου (1ος συνδυασμός στην 5), η οποία είναι συμμετρική. Οι άλλοι τρεις συνδυασμοί (2ος, 3ος και 4ος) αποδείχθηκαν κακές επιλογές (δεν οδηγούν σε αναλλοίωτο αποτέλεσμα) και επομένως αν θέλουμε να φτιάξουμε το ευρύτερο αναλλοίωτο βαθμωτό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων θα πρέπει να επιλέξουμε συντελεστές $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \kappa$ για να σβήσουμε τον 2ο κακό συνδυασμό και $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$ για να σβήσουμε τον 3ο και 4ο κακό συνδυασμό. Αυτό που απομένει

$$(a_1, a_2) \star_1 (b_1, b_2) \ = \ \kappa(a_1 b_1 + a_2 b_2) \tag{6}$$

είναι αναλλοίωτο και είναι και συμμετρικό:

$$-(b_1, b_2) \star_1 (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \star_1 (a_1, a_2) \ .$$

Το συμμετρικό γινόμενο, $\star_1$, μιας και όπως δείξαμε είναι *καλό γινόμενο*, το ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων και η κατασκευή του σε οποιεσδήποτε διαστάσεις έχει την ίδια μορφή:

$$\vec{a} \star_1 \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_N b_N \ .$$

[20] Αυτή η ιδιότητα δεν είναι ανεξάρτητη από την ιδιότητα αλλαγής προσήμου σε εναλλαγή των αξόνων που είδαμε προηγουμένως.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων συμβολίζεται απλώς:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \,. \tag{7}$$

Το τέταρτο γινόμενο, $\star_4$, σχετίζεται, όπως θα δείξουμε αργότερα, με το επονομαζόμενο εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων και η κατασκευή του σε οποιεσδήποτε διαστάσεις είναι πολύ πιο σύνθετη από την περίπτωση των δύο διαστάσεων και το πιο σημαντικό, δεν είναι οπωσδήποτε ένα βαθμωτό γινόμενο. Είναι για τα δισδιάστατα διανύσματα βαθμωτό που αλλάζει πρόσημο σε αριστερόστροφα συστήματα (δηλαδή ψευδοβαθμωτό), για τα τρισδιάστατα διανύσματα, διάνυσμα (για την ακρίβεια ψευδοδιάνυσμα λόγω της αντισυμμετρίας του) και για διανύσματα σε παραπάνω από 3 διαστάσεις τανυστής, μια γενίκευση, δηλαδή, του διανύσματος. Περισσότερα για το περίεργο αυτό γινόμενο-χαμελαίοντα θα δούμε σε μεταγενέστερο εδάφιο.

Πριν κλείσουμε το παρόν εδάφιο θα πρέπει να τονίσουμε ότι από αυτό το σημείο και ύστερα, θα πρέπει να ξεχάσουμε τους συμβολισμούς $\star, \star_1, \star_2, \star_4, \star_{12}$. Χρησιμοποιήθηκαν πειραματικά για να διευκολύνουν τη συζήτησή μας και δεν σημαίνουν απολύτως τίποτε. Μην τα χρησιμοποιήσετε. Κανείς δεν θα καταλάβει τι εννοείτε, αν τα γράψετε.

Απόπειρα 5 (ως επίλογος): Ίσως αναρωτηθήκατε, όταν κατασκευάσαμε το γενικό γινόμενο $\star_{12}$ γιατί να είναι αυτή η γενικότερη έκφραση γραμμικού γινομένου (όταν διπλασιάζεται το ένα διάνυσμα, να διπλασιάζεται το αποτέλεσμα). Δεν θα μπορούσε να ορίσει κανείς ως γινόμενο διανυσμάτων αναλλοίωτο το

$$(a_1, a_2) \star_5 (b_1, b_2) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

δηλαδή το γινόμενο των μέτρων τους; Θα ήταν αναλλοίωτο αφού τα μέτρα είναι αναλλοίωτα και αν διπλασιαζόταν το ένα διάνυσμα θα διπλασιαζόταν το αποτέλεσμα του γινομένου. Αν, όμως, πολλαπλασιάζονταν με (-1) το ένα διάνυσμα, τι θα πάθαινε το γινόμενο; Εξάλλου ένα τέτοιο γινόμενο δεν θα μας έδινε καμία πληροφορία για την σχετική χωροθέτηση των διανυσμάτων. Ότι γωνία και να σχημάτιζαν αυτά θα οδηγούμασταν στο ίδιο αποτέλεσμα. Είναι κάπως ανάλογο με το να ορίζαμε το βαθμωτό γινόμενο μεταξύ δύο οιονδήποτε διανυσμάτων ως: $(a_1, a_2) \star_5 (b_1, b_2) = 1$!

1.8 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ιδρώσαμε, αλλά φτιάξαμε ένα μαργαριτάρι. Ένα γινόμενο διανυσμάτων, που συμπεριφέρεται όπως το γινόμενο των αριθμών και είναι και το ίδιο αριθμός και δεν έχει απολύτως καμία σημασία ποιο θα βάλουμε πρώτα στον πολλαπλασιασμό και ποιο μετά. Το γινόμενο αυτό ορίστηκε ως ακολούθως:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_N b_N = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta_{\vec{a},\vec{b}}.$$

Για να λέμε όλη την αλήθεια είδαμε ότι στις 2 διαστάσεις λαμβάνει αυτή τη μορφή με το συνημίτονο. Δεν είναι, όμως, δύσκολο να φανταστούμε γιατί η έκφραση αυτή ισχύει και πιο γενικά. Αρκεί να θέσουμε τον 1ο άξονα κατά μήκος του διανύσματος $\vec{a}$ και το δεύτερο άξονα να εκτείνεται κάθετα στον 1ο και να ορίζει, μαζί με τον 1ο, το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται τα δύο διανύσματα. Τότε

$$\begin{aligned} a_1 &= |\vec{a}|, \\ a_2 &= a_3 = \ldots = 0, \\ b_1 &= |\vec{b}| \cos\theta_{\vec{a},\vec{b}}, \\ b_2 &= |\vec{b}| \sin\theta_{\vec{a},\vec{b}}, \\ b_3 &= b_4 = \ldots = 0. \end{aligned}$$

Αυτό που ακόμη δεν έχουμε διερευνήσει επαρκώς είναι ότι αυτή η ποσότητα είναι πράγματι αναλλοίωτη.[21] Μάλιστα έχουμε προτρέξει και δείξαμε τη σχέση του γινομένου με τα μέτρα και το συνημίτονο βασιζόμενοι ακριβώς σε αυτή την αναλλοιότητα, ώστε να επιλέξουμε έξυπνα τους άξονες για τον υπολογισμό του.

Στο σημείο αυτό ας επισημάνουμε για άλλη μια φορά το συμβολισμό που επιλέξαμε $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Προσέξτε το $\cdot$, δεν είναι λεκές στο χαρτί ή καμμένο pixel στην οθόνη.[22] Είναι το σύμβολο που έχει επιλεγεί να προσδιορίζει ακριβώς αυτό το είδος του γινομένου διανυσμάτων (του εσωτερικού γινομένου). Έχει επιλεγεί έτσι ώστε να διακρίνεται από άλλα είδη πολλαπλασιασμού διανυσμάτων, που είδαμε προηγουμένως και στα οποία θα επανέλθουμε στη συνέχεια. Αν γράφαμε

$$\vec{a}\,\vec{b}\ ,$$

πραγματικά δεν θα ξέραμε τι να κάνουμε. Ο συγγραφέας του παραπάνω αντικειμένου τι θα εννοούσε αλήθεια; Δύο διανύσματα, τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$; Κάποιο γινόμενο των δύο διανυσμάτων; Ποιο από όλα; Εν ολίγοις η παραπάνω γραφή στερείται νοήματος, όντας μόνη της. *Μην την χρησιμοποιείται ποτέ!*

1.8.1 Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

Καταρχάς ποιο θα ήταν το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου ενός διανύσματος με τον εαυτό του;

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2\ .$$

[21] Δείξαμε μόνο ότι αν αλλάξουμε τους άξονες και επιλέξουμε τον άξονα x να βρίσκεται είτε κατά μήκος του $\vec{a}$ είτε κατά μήκος του $\vec{b}$, το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού θα είναι ίδιο. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι είναι πράγματι αναλλοίωτο, όπως και αν στραφούν οι άξονες.

[22] Στο σχολείο όταν αρχίσαμε να μαθαίνουμε τον πολλαπλασιασμό αριθμών γράφαμε 2×3, μετά, σε πιο μεγάλη τάξη το γράφαμε $2 \cdot 3$ (πιο απλό αλλά έπρεπε κάπως να το ξεχωρίσουμε από το 23). Σε ακόμη μεγαλύτερη τάξη όταν μάθαμε να πολλαπλασιάζουμε άγνωστες ποσότητες που παρίσταναν αριθμούς γράφαμε ακόμη πιο απλά $2x$, όπου το σύμβολο $\cdot$ θεωρούνταν μπαρόκ στολισμός, οπότε παραλείπονταν. Ήταν απόλυτα κατανοητό ότι εννοούσαμε το διπλάσιο του x χωρίς να υπάρχει το σύμβολο του πολλαπλασιασμού.

Ο αναλλοίωτος αριθμός που πήραμε, δεν είναι άλλος από το τετράγωνο του αναλλοίωτου μέτρου του διανύσματος.

Δεδομένου ότι το $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (μην ξεχνάτε την τελεία) προκύπτει από το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων $|\vec{a}|$ και $|\vec{b}|$ καθώς και το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας (που λόγω αρτιότητας του συνημιτόνου δεν έχει σημασία πως θα τη μετρήσουμε, από το $\vec{a}$ προς το $\vec{b}$ ή από το $\vec{b}$ προς το $\vec{a}$) το γινόμενο αυτό θα είναι 0 αν τα διανύσματα είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο. Επίσης το εύρος αυτού του γινομένου θα βρίσκεται στο διάστημα

$$[-|\vec{a}|\;|\vec{b}|, +|\vec{a}|\;|\vec{b}|],$$

ανάλογα με τη σχετική χωροθέτηση των δύο διανυσμάτων.

Θα εκμεταλλευτούμε το εσωτερικό γινόμενο για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων x, y. Όταν γράφουμε

$$\vec{r} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$$

καταλαβαίνουμε ότι το a_1 είναι το αλγεβρικό μέτρο (το μέτρο συνοδευόμενο με κάποιο πρόσημο που σχετίζεται με τη φορά) της προβολής του διανύσματος $\vec{a}$ πάνω στον άξονα x, Το a_1 είναι θετικό αν η προβολή του πέρατος του διανύσματος βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα x και αρνητικό αν βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα x. Η συντεταγμένη αυτή a_1 θα μπορούσε εύκολα να αναπαραχθεί από το εσωτερικό γινόμενο

$$a_1 = \vec{a}\cdot\hat{e}_1 = |\vec{a}|\;|\hat{e}_1|\cos\theta_{\vec{a},\hat{e}_1} = |\vec{a}|\;1\;\cos\theta_{\vec{a},\hat{e}_1} = |\vec{a}|\;\cos\theta_{\vec{a},\hat{e}_1}.$$

Πράγματι για διανύσματα που σχηματίζουν γωνία με τον άξονα x, ϕ, με $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$, η συντεταγμένη a_1 θα είναι $|\vec{a}|\cos\phi$ όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα αν χρησιμοποιήσει απλή τριγωνομετρία στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από το διάνυσμα, τον άξονα x και την κάθετο στον άξονα x που φέρουμε από το πέρας του διανύσματος. Αν η αντίστοιχη γωνία είναι αμβλεία, $|\phi| \ge \pi/2$, τότε $a_1 = -|\vec{a}|\cos(\pi-\phi) = |\vec{a}|\cos\phi$, κατασκευάζοντας και πάλι το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από το διάνυσμα, τον αρνητικό ημιάξονα x και την κάθετο στον άξονα x που φέρουμε από το πέρας του διανύσματος. Προσέξτε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζεται σε αυτό το τρίγωνο είναι η παραπληρωματική $\pi-\phi$ της αμβλείας γωνίας ϕ που σχηματίζει το διάνυσμα με τον θετικό ημιάξονα x (την αρχή μέτρησης των γωνιών κατά τη σύμβασή μας).

Επομένως και η y-συντεταγμένη του διανύσματος μπορεί να γραφεί

$$a_2 = \vec{a}\cdot\hat{e}_2$$

και τώρα το διάνυσμα μπορεί να ανασυντεθεί ως

$$\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{e}_1)\hat{e}_1 + (\vec{a}\cdot\vec{e}_2)\hat{e}_2.$$

Στην παραπάνω γραφή οι παρενθέσεις χρησιμοποιήθηκαν καταχρηστικά. Η παρουσία τών “ $\cdot$ ” στα εσωτερικά γινόμενα δεν αφήνει περιθώρια παρερμηνειών. Έτσι χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{a} = \vec{a}\cdot\hat{e}_i\;\hat{e}_i\;. \qquad (8)$$

Μάλιστα δεν θα άλλαζε τίποτε αν “μεταφέραμε” το διάνυσμα στο τέλος:

$$\vec{a} = \hat{e}_i \; \hat{e}_i \cdot \vec{a} \; . \tag{9}$$

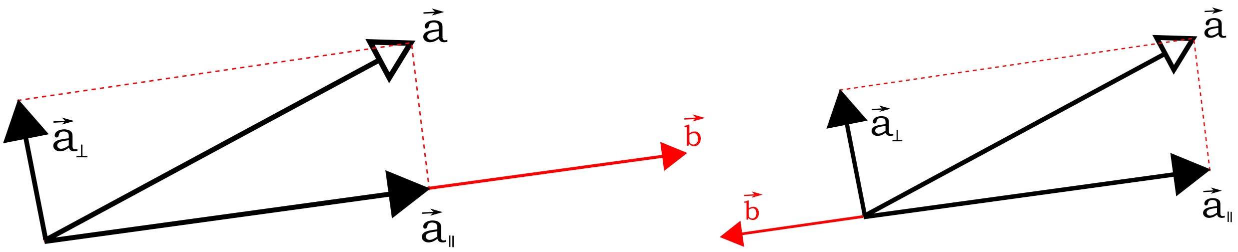
Προσέξτε την απουσία οποιουδήποτε σημαδιού μεταξύ των δύο $\hat{e}_i$ και στις δύο παραπάνω εκφράσεις. Ανάλογα με τη θέση της “ $\cdot$ ”, πριν (σχέση 8) ή μετά (σχέση 9), το ζεύγος των μοναδιαίων θα σπάσει αφήνοντας έναν αριθμό και ένα “μοναχικό” μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο θα πολλαπλασιάζεται με τον προηγούμενο αριθμό. Η ποσότητα

$$\hat{e}_i\hat{e}_i$$

είναι όπως θα δείξουμε αργότερα ένα νέο αντικείμενο που αποτελεί γενίκευση των διανυσμάτων: είναι ένας τανυστής 2ης τάξης που λειτουργεί σαν τον αριθμό 1 δρώντας σε ένα διάνυσμα μέσω εσωτερικού γινομένου είτε εκ δεξιών είτε εξ αριστερών. Είναι όπως λέμε ο *τανυστής ταυτότητα*, ο οποίος δρα ως τη μονάδα, αν πολλαπλασιάσει εσωτερικά ένα διάνυσμα.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε αυτή την προβολική διαδικασία, που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος με τη χρήση του εσωτερικού γινομένου, προκειμένου να προβάλουμε ένα διάνυσμα, το $\vec{a}$, πάνω σε ένα άλλο δοσμένο διάνυσμα, το $\vec{b}$. Με τον όρο προβολή εννοούμε τη σκιά του πρώτου διανύσματος, μαζί με τη μύτη του, πάνω στο δεύτερο. Ίσως εγείρετε την ένσταση ότι ανάλογα με το φωτισμό παίρνουμε και άλλη σκιά. Εδώ, για τις ανάγκες του φωτισμού θα φανταζόμαστε μια φωτεινή πηγή πολύ μακριά από τα δύο διανύσματα που ρίχνει τις ακτίνες της κάθετα στο 2ο διάνυσμα επί του οποίου θέλουμε να προβάλουμε το 1ο. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το μέγεθος της προβολής θα είναι (βλ. σχήμα)

$$|\vec{a}| \cos\theta_{\vec{a},\vec{b}} \; .$$



Σχήμα 10: Κατασκευή της προβολής του διανύσματος $\vec{a}$ στη διεύθυνση του $\vec{b}$ όταν η μεταξύ τους γωνία είναι οξεία (αριστερό σχήμα) ή αμβλεία (δεξιό σχήμα). Επίσης σημειώνεται η κάθετη στην προβολή συνιστώσα του $\vec{a}$.

Ο αριθμός αυτός θα είναι θετικός ή αρνητικός ανάλογα με τη γωνία $\theta_{\vec{a},\vec{b}}$. Επομένως ο αριθμός αυτός εμπεριέχει πληροφορία και για το μέτρο της προβολής, αλλά και για τη φορά της (μέσω του προσήμου του παραπάνω αριθμού). Το μόνο, τώρα, που μένει είναι να το μετατρέψουμε από αριθμό σε διάνυσμα βάζοντας τον αριθμό να πολλαπλασάσει το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του $\vec{b}$, δηλαδή το διάνυσμα που είναι συγγραμικό και ομόρροπο με το $\vec{b}$, αλλά αντί να έχει μέτρο $|\vec{b}|$, όπως το $\vec{b}$, έχει μέτρο 1. Συνοψίζοντας[23]

$$\text{προβ}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\theta_{\vec{a},\vec{b}}\, \hat{b} = |\vec{a}| \cos\theta_{\vec{a},\vec{b}}\, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\,\vec{b}\,.$$

Το κλάσμα που πολλαπλασιάζει το $\vec{b}$ στην παραπάνω έκφραση, είναι ο αριθμητικός παράγοντας που καθορίζει πόσες φορές πρέπει να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{b}$ για να φτιάξουμε τη σκιά του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{b}$.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να εκμεταλλευτούμε την προβολή διανύσματος προκειμένου να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ σε ένα σύστημα αξόνων που επιβάλλεται από κάποια προκαθορισμένη κατεύθυνση που σχετίζεται με κάποιο ήδη δοσμένο διάνυσμα $\vec{b}$. Δηλαδή θέλουμε να αναλύσουμε το διάνυσμα $\vec{a}$ στα $\vec{a}_\parallel$ και $\vec{a}_\perp$:

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp\ ,$$

όπου τα σύμβολα $\parallel$ και $\perp$ αναφέρονται στις κατευθύνσεις κάποιου δοσμένου $\vec{b}$ και κάθετα σε αυτό (ώστε να σχηματίσουμε πάλι ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων).[24]

Η συνιστώσα $\vec{a}_\parallel$ δεν είναι άλλη από την προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$, επομένως

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + (\vec{a} - \vec{a}_\parallel) = \text{προβ}_{\vec{b}}\vec{a} + (\vec{a} - \text{προβ}_{\vec{b}}\vec{a}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\,\vec{b} + \left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\,\vec{b}\right)\ .$$

Μπορεί να θεωρήσετε την παραπάνω έκφραση απλή ταυτολογία αφού προσθαφαιρείται ένα διάνυσμα τέρας στο $\vec{a}$ για να σχηματίσουμε το $\vec{a}$. Πράγματι είναι ταυτολογία, αλλά μια πολύ χρήσιμη ταυτολογία. Ο διανυσματικός σχηματισμός μέσα στην παρένθεση είναι η απλούστερη έκφραση της κάθετης συνιστώσας κατά την ανάλυση του $\vec{a}$. Δυστυχώς καμμία άλλη πράξη περαιτέρω απλοποίησης δεν είναι δυνατή για τη γραφή του $\vec{a}_\perp$.

Ας κάνουμε και μια τελευταία παρατήρηση κλείνοντας το εδάφιο για τη χρήση του εσωτερικού γινομένου. Η κατασκευή της προβολής ενός διανύσματος κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας από δύο φορές το διάνυσμα οδηγό, $\vec{b}$, και στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Αυτό είναι απολύτως λογικό γιατί δεν έχει καμία σημασία το μέτρο του

[23] Ο αγγλικός (διεθνής) όρος για την προβολή ενός διανύσματος επί ενός άλλου είναι αντιστοίχως $\text{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

[24] Ίσως θεωρήσετε ότι η κάθετη κατεύθυνση στο $\vec{b}$, $\vec{a}_\perp$, είναι καθορισμένη μόνο στις 2 διαστάσεις και όχι σε περισσότερες, αφού κάθετα στο $\vec{b}$ είναι μια ολόκληρη επιφάνεια στις 3 διαστάσεις και μια υπερεπιφάνεια σε περισσότερες διαστάσεις. Όμως το ίδιο το $\vec{a}$ δεν αφήνει περιθώρια για άλλες κάθετες κατευθύνσεις πλην μίας. Σκεφθείτε το.

οδηγού κατεύθυνσης, $\vec{b}$. Αυτό που έχει μόνο σημασία είναι η κατεύθυνσή του. Αντιθέτως το προβαλλόμενο διάνυσμα $\vec{a}$ εμφανίζεται μόνο μια φορά στον αριθμητή γιατί το μέτρο του θα επηρεάσει αναλογικά και το μέτρο της προβολής του.

1.9 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο ότι ο συνδυασμός συντεταγμένων

$$\vec{a} \star_4 \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

είναι αναλλοίωτος σε αλλαγές των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς.[25] Ο συνδυασμός αυτός είναι πάλι ένας αριθμός, ακριβώς όπως και το εσωτερικό γινόμενο, αλλά προβληματικός ως προς την αναλλοιότητα του προσήμου του. Εμείς είμαστε συνηθισμένοι, από το γινόμενο δύο αριθμών, ένα γινόμενο να είναι ανεξάρτητο της σειράς των πολλαπλασιαζόμενων. Το αναλλοίωτο αυτό μέγεθος είναι εκ κατασκευής, όμως, αντισυμμετρικό, όπως παρατηρήσαμε και νωρίτερα:

$$\vec{a} \star_4 \vec{b} = -\vec{b} \star_4 \vec{a}.$$

Αυτός είναι και ο λόγος που αποφύγαμε να το χρησιμοποιήσουμε για τη δημιουργία ενός αριθμού από το γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Η περίεργη αυτή αντισυμμετρική αναλλοίωτη ποσότητα θα αποτελέσει τη βάση για να φτιάξουμε ένα αναλλοίωτο διάνυσμα από το γινόμενο δύο δοθέντων. Δυστυχώς όμως είναι αδιέξοδη η προσπάθεια για τη δημιουργία ενός τέτοιου διανύσματος-γινομένου στις 2 διαστάσεις. Το επιχείρημα είναι το ακόλουθο. Έστω ότι καταφέρναμε να κατασκευάσουμε με πολλαπλασιασμό από 2 διανύσματα του δισδιάστατου επιπέδου, ένα τρίτο, το οποίο να έχει αυτοτελή γεωμετρική υπόσταση ανεξαρτήτως του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση των διανυσμάτων. Ποια θα ήταν η διεύθυνση αυτού του διανύσματος; Αυτή του $\vec{a}$; Αυτή του $\vec{b}$; Κάποια ενδιάμεση διεύθυνση; Η τελευταία πρόταση ακούγεται πιο συνετή. Γιατί να ξεχωρίσουμε το πρώτο διάνυσμα, ή το δεύτερο; Μάλιστα για να διευκολυνθούμε στην επιλογή της διεύθυνσης ας κάνουμε τα δύο διανύσματα ισότιμα: Ας διαλέξουμε δύο διανύσματα ίδιου μέτρου. Ε, τότε, η πιο λογική κατασκευή διανύσματος θα ήταν κάποιο διάνυσμα κατά μήκος της διχοτόμου τους, δηλαδή

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \lambda(a_1, a_2, b_1, b_2) \left(a_1 + b_1, a_2 + b_2\right),$$ [26]

όπου “ $\otimes$ ” συμβολίζει την πράξη του διανυσματικού γινομένου που προσπαθούμε να

[25] Αυτό δεν το αποδείξαμε, αλλά το διαπιστώσαμε για δύο χαρακτηριστικές επιλογές αξόνων. Θα το αποδείξουμε, όμως, σε κατοπινό κεφάλαιο, όπου θα κατασκευάσουμε τον κανόνα μετασχηματισμού των συντεταγμένων ενός διανύσματος όταν οι άξονες συντεταγμένων υποστούν μια τυχαία στροφή.

[26] Στην έκφραση αυτή –και στις ακόλουθες– οι παρενθέσεις παίζουν διττό ρόλο: Μετά το λ δηλώνουν συναρτησιακή σχέση του λ από τα a_1, a_2, b_1, b_2, ενώ στη συνέχεια οι μεγάλες παρενθέσεις υποδηλώνουν ένα διάνυσμα.

κατασκευάσουμε.[27] Το διάνυσμα που γράψαμε είναι η άθροιση των δύο διανυσμάτων που εξασφαλίζει την ακριβώς "δημοκρατικά" ενδιάμεση κατεύθυνση στην περίπτωση των ίσου μέτρου διανυσμάτων. Τέλος η συνάρτηση λ είναι μια κατάλληλη συνάρτηση των συντεταγμένων των δύο διανυσμάτων που ρυθμίζει το μέτρο του νέου διανύσματος-γινομένου. Εκ κατασκευής, το διάνυσμα αυτό δεν είναι δυνατό να πληροί τη βασική ιδιότητα ενός γινομένου, δηλαδή να είναι γραμμικό ως προς το κάθε διάνυσμα. Για παράδειγμα δεν είναι δυνατό το διάνυσμα

$$(2\vec{a}) \otimes \vec{b} = \lambda(2a_1, 2a_2, b_1, b_2)\left(2a_1 + b_1, 2a_2 + b_2\right),$$

να μας δώσει ένα διάνυσμα διπλάσιο από το

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \lambda(a_1, a_2, b_1, b_2)\left(a_1 + b_1, a_2 + b_2\right),$$

αφού ακόμη και αν ρυθμίσουμε καταλλήλως τη συνάρτηση λ ώστε τα μέτρα των δύο διανυσμάτων να είναι έχουν σχέση 2 προς 1, οι κατευθύνσεις τους δεν είναι ποτέ δυνατόν να συμπέσουν. Με λίγα λόγια δεν είναι δυνατόν να φτιάξουμε ένα νέο διάνυσμα στις 2 διαστάσεις πολλαπλασιάζοντας δύο διανύσματα.[28]

Και όμως ίσως και να μπορούμε τελικά να φτιάξουμε ένα τέτοιο διάνυσμα. Οι ποσότητες $f_1 = \vec{a} \cdot \vec{b}$ και $f_2 = |\vec{a}||\vec{b}|$ είναι αναλλοίωτες και διαθέτουν την κλασική ιδιότητα του γινομένου. Το μόνο λοιπόν που έχουμε να κάνουμε είναι να σταθεροποιήσουμε δύο προεξάρχουσες κατευθύνσεις που σχετίζονται με τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και οι οποίες δεν αλλάζουν αν το ένα από τα δύο διανύσματα αλλάξει μέτρο (αυτό ακριβώς είναι που χάσαμε στην προηγούμενη απόπειρα). Μια τέτοια επιλογή διευθύνσεων είναι οι

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Το διάνυσμα $f_1\vec{e}_+ + f_2\vec{e}_-$ είναι ένα διάνυσμα-γινόμενο που δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσουμε για την αναπαράσταση των δύο διανυσμάτων. Στη θέση μάλιστα των f_1, f_2 θα μπορούσαμε να έχουμε και άλλες αντίστοιχες παραμέτρους, π.χ. $\sqrt{f_2^2 - f_1^2}, \sqrt{f_2^2 + f_1^2}, \sqrt{f_2^2 + 3f_1^2}, \ldots$ Επίσης στη θέση των $\vec{e}_{\pm}$ θα μπορούσαμε να έχουμε άλλα παρόμοια

$$\vec{e}_{\pm}^{(k_1,k_2)} = k_1\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm k_2\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

[27]Για άλλη μια φορά τονίζουμε ότι ο συμβολισμός αυτός δεν σημαίνει απολύτως τίποτε και χρησιμοποιείται εδώ για να συμβολίσει μια απόπειρα, η οποία ττελικά θα αποδειχθεί αποτυχημένη.

[28]Πιθανόν να σκεφτόσασταν ότι από δύο ίσου μέτρου διανύσματα υπάρχει άλλη μια δυνατή λογική κατεύθυνση, αυτή της διαφοράς τους $(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$. Και αυτή όμως θα οδηγούσε στο ίδιο αδιέξοδο, για τον ίδιο ακριβώς λόγο!

Όλες αυτές οι αυθαίρετες κατασκευές, αν και θα μπορούσαν να "σταθούν" ως αναλλοίωτα διανύσματα-γινόμενα, η αυθαιρεσία που ακολουθεί την κατασκευή τους δείχνει και το πόσο αφύσικες είναι όλες. Επίσης, από την βασική απαίτηση της γραμμικότητας, θα περίμενε κανείς ότι για το γινόμενο αυτό θα ίσχυε ότι

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = (-\vec{a}) \otimes (-\vec{b})$$

διαγράφοντας τα δύο "–". Όλες, όμως, οι προηγούμενες κατασκευές θα αποτύγχαναν απλά και μόνο γιατί τα νέα $\vec{e}_\pm$ που θα κατασκεύαζε κανείς από τα $(-\vec{a})$ και $(-\vec{b})$ θα άλλαζαν την κατεύθυνση του καινοφανούς γινομένου-διανύσματος. Η αποτυχία της απόπειρας οφείλεται, κατ' ουσίαν, στην τεχνητή –και τελικά ψευδεπίγραφη– γραμμικότητα του γινομένου αυτού. Τα $\vec{e}_\pm$ δεν είναι καθαρά γραμμικές κατασκευές των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Το ίδιο ισχύει και για το βαθμωτό f_2, αφού $f_2(-\vec{a}, \vec{b}) \neq -f_2(\vec{a}, \vec{b})$.

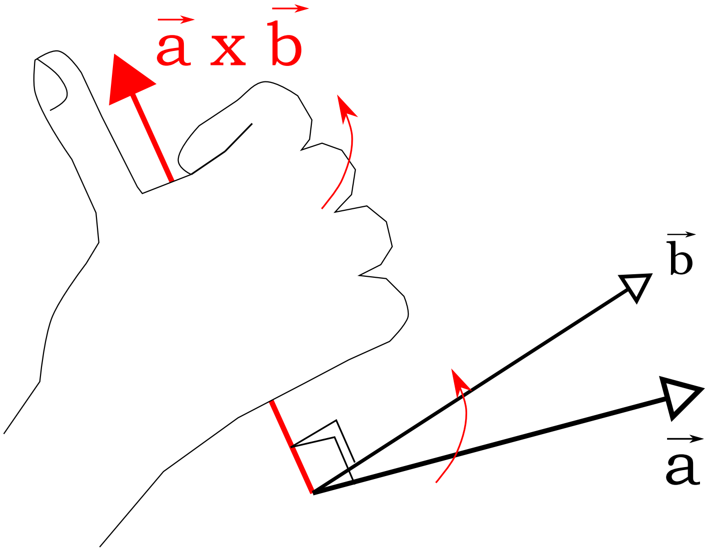
Δυστυχώς κανένα, τελικά, διάνυσμα-γινόμενο δεν έχει νόημα στις 2 διαστάσεις. Ας ανοίξουμε, λοιπόν, τα φτερά μας στις 3 διαστάσεις, μήπως η έξτρα διάσταση μας δώσει παραπάνω ελευθερία. Επί της δισδιάστατης επιφάνειας που ορίζουν τα δύο διανύσματα δεν υπάρχει χώρος για ένα καλά ορισμένο διάνυσμα-γινόμενο. Στη διεύθυνση την κάθετη σε αυτή την επιφάνεια[29], όμως, ίσως να μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο διάνυσμα. Τώρα, όμως, μας προσφέρονται δύο δυνατές φορές, αυτή προς τη μια πλευρά της επιφάνειας και αυτή προς την αντίθετη. Δυστυχώς δεν έχουμε τρόπο να αποφασίσουμε ποια από τις δύο φορές να διαλέξουμε για την κατασκευή του γινομένου-διανύσματος. Η μία από τις αναλλοίωτες κατασκευές στις 2 διαστάσεις, που είδαμε πιο πάνω, έρχεται σε βοήθεια, ώστε να μην εγκαταλείψουμε την προσπάθεια, εξαιτίας αυτής της αμφιγνωμίας. Θυμόμαστε ότι το γινόμενο-αριθμός

$$\vec{a} \star_4 \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

αλλάζει πρόσημο όταν τα δύο πολλαπλασιαζόμενα διανύσματα αλλάζουν σειρά. Γιατί να μην εκμεταλλευτούμε αυτή την αντισυμμετρία για να αποφασίσουμε ποια φορά θα διαλέξουμε για το γινόμενο-διάνυσμα; Ας ορίσουμε ως γινόμενο-διάνυσμα των τρισδιάστατων διανυσμάτων $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ που βρίσκονται στην δισδιάστατη επιφάνεια $x - y$ (ή αλλιώς την επιφάνεια $z = 0$) το διάνυσμα:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1) \; . \tag{10}$$

Το διάνυσμα αυτό είναι, εκ κατασκευής, κάθετο στα δύο πρώτα. Είναι, επίσης, εκ κατασκευής απολύτως γραμμικό ως προς τα $\vec{a}, \vec{b}$ (και όχι ψευτογραμμικό όπως τα $\vec{e}_\pm$ που φτιάξαμε παραπάνω). Η δε φορά του καθορίζεται από το ποιο διάνυσμα εμφανίζεται πρώτο στο γινόμενο. Μα γιατί δεν αφήσαμε το νέο διάνυσμα να έχει και x, y συνιστώσες; Η απάντηση είναι ότι αν υπήρχε κατάλληλο γινόμενο με μη μηδενικές x, y συνιστώσες, τότε, μηδενίζοντας τη z-συνιστώσα του, θα είχαμε καταφέρει αυτό που προσπαθήσαμε



Σχήμα 11: Κατασκευή του εξωτερικού γινομένου $\vec{a} \times \vec{b}$ μέσω της σύμβασης του δεξιού χεριού.

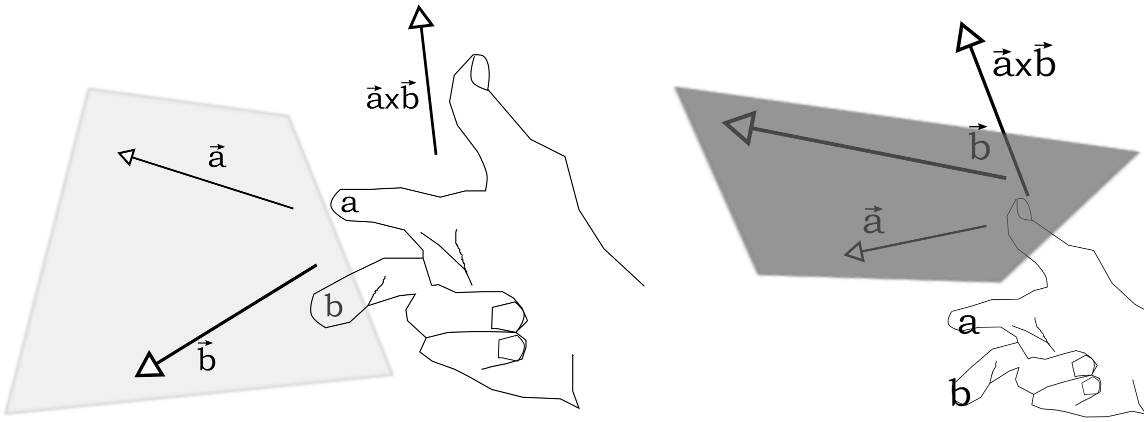
χωρίς αποτέλεσμα πρωτύτερα, όταν επιχειρούσαμε να φτιάξουμε κάποιο διάνυσμα-γινόμενο στο επίπεδο $x - y$.

Είναι αλήθεια ενοχλητική η αντισυμμετρική ιδιότητα αυτού του νέου διανύσματος; Τουναντίον, είναι σωτήρια. Αν το γινόμενο αυτό δεν ήταν αντισυμμετρικό, αυτό θα σήμαινε ότι όπως και να τοποθετούσαμε αυτά τα διανύσματα το αποτέλεσμα θα ήταν ένα διάνυσμα που θα "κοίταζε"' πάντα προς τη μία πλευρά του επιπέδου που θα ορίζανε αυτά. Ποια θα ήταν αυτή η "καλή" πλευρά; Αν υποθέταμε ότι ο κόσμος όλος ήταν παντελώς άδειος και υπήρχε κάπου ένα επίπεδο σχήμα, πώς θα μεταφέραμε σε έναν άλλο νοήμων ον την πληροφορία σχετικά με το σε ποια πλευρά του σχήματος αναφερόμαστε; Και οι δύο πλευρές θα ήταν απολύτως ισοδύναμες!

Η κατοπτρικά συμμετρική κατασκευή του ίδιου του σώματός μας, μας επιτρέπει να διακρίνουμε τις δύο πλευρές ακολουθώντας μια συμβατική πορεία: αυτή του δεξιού χεριού. Αν κατευθύνουμε τα μισο-διπλωμένα δάχτυλα του δεξιού μας χεριού (μιας και οι δεξιόχειρες είμαστε περισσότεροι) προς μια προδιαγεγραμμένη φορά διαγραφής του περιγράμματος κάποιου επίπεδου σχήματος, ο τεντωμένος μας αντίχειρας θα δείξει προς τη μια πλευρά του σχήματος (αυτήν μπορούμε να τη ονομάζουμε συμβατικά, "επάνω" ή "θετική" πλευρά). Αντίστοιχα, στην περίπτωση των δύο διανυσμάτων, μπορούμε με τα μισο-διπλωμένα δάχτυλά μας να στρίψουμε ιδεατά το πρώτο διάνυσμα προς το δεύτερο ακολουθώντας τη μικρότερη δυνατή γωνία στροφής. Αυτομάτως ο αντίχειρας θα διακρίνει τη μια από τις δύο κάθετες διευθύνσεις. Και προφανώς αυτή η

[29] Γιατί ειδικά σε αυτή τη διεύθυνση και όχι γενικά στο χώρο θα το εξηγήσουμε αργότερα, στο παρόν κεφάλαιο.

φορά θα αντιστραφεί αν ακολουθήσουμε με τα δάχτυλά μας της στροφή από το δεύτερο προς το πρώτο διάνυσμα. Ακριβώς το ίδιο που συμβαίνει με το πρόσημο του $\vec{a} \star_4 \vec{b}$, ή τη φορά του διανύσματος $\vec{a} \times \vec{b}$ που περιέχει το $\vec{a} \star_4 \vec{b}$ ως 3η συντεταγμένη!



Σχήμα 12: Το εξωτερικό γινόμενο, με τη σύμβαση του δεξιού χεριού, και την αντισυμμετρική κατασκευή του από τις συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων, οδηγεί στο ίδιο διάνυσμα, όπως και αν κοιτάξουμε το επίπεδο των διανυσμάτων, είτε από πάνω (αριστερά), είτε από κάτω (δεξιά).

Φτιάξαμε λοιπόν ακριβώς ότι ζητούσαμε αρχικά για δύο τρισδιάστατα διανύσματα: Ένα διάνυσμα που συμπεριφέρεται ως διάνυσμα. Στην περίπτωση που τα δύο διανύσματα βρίσκονται στο επίπεδο $z = 0$, αυτό είναι το διάνυσμα

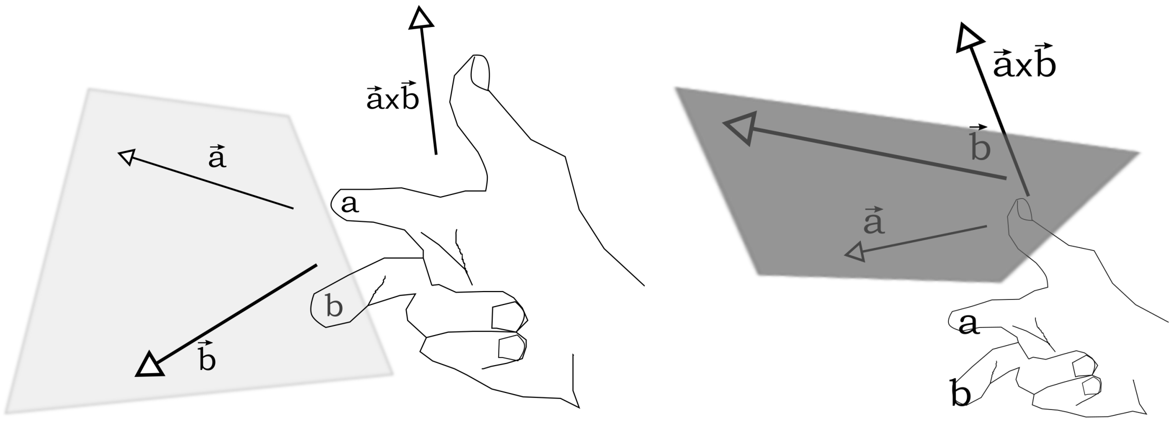
$$(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0) = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1) \; .$$

Μην ξεχνάμε ότι όλη η συζήτηση ξεκίνησε από την αναλλοιότητα του $a_1 b_2 - a_2 b_1$ που μας πρόσφερε τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε ένα διάνυσμα στον τρισδιάστατο χώρο το οποίο να έχει απόλυτο γεωμετρικό νόημα και να μην αλλάζει, αν αλλάξει κανείς το σύστημα των συντεταγμένων του. Γιατί λοιπόν να μην ορίζαμε ως ένα άλλο “καλό” γινόμενο και το αναλλοίωτο διάνυσμα

$$(a_1, a_2, 0) \odot (b_1, b_2, 0) = (0, 0, a_1 b_1 + a_2 b_2) \; , \tag{11}$$

αφού έχουμε στη διάθεσή μας κι άλλο ένα αναλλοίωτο; Όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο ακριβώς αυτό το αυστηρό αναλλοίωτο είναι που θα θέλαμε να αποφύγουμε. Η κατασκευή διανύσματος κάθετο στο επίπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$ ενέχει εκ γεννετής μια αμφισημία την οποία θέλουμε το κατασκεύασμά μας να ενσωματώνει με κάποιο τρόπο. Το παραπάνω προτεινόμενο αναλλοίωτο διάνυσμα είναι στραμμένο κατά τη θετική φορά του άξονα z, εφόσον η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων είναι οξεία (ώστε το εσωτερικό γινόμενο που εμφανίζεται στην z-συνιστώσα να είναι θετικό). Όμως αν μας δώσουν δύο διανύσματα που ορίζουν ένα επίπεδο πώς θα φτιάξουμε τον άξονα z

με μονοσήμαντο τρόπο; Υπάρχουν 2 απολύτως ισότιμες επιλογές για την κατεύθυνσή του. Ποια να επιλέξουμε; Μα και πριν χρειάστηκε να προαποφασίσουμε μια σύμβαση την οποία μπορούμε και τώρα να υιοθετήσουμε: Στρίβοντας τον άξονα x του επιπέδου μας προς τον y με τα δάχτυλα του δεξιού μας χεριού ο αντίχειρας θα μας ορίσει τον z! Δυστυχώς, όμως, το πως θα στήσουμε τους άξονες x, y στο δοθέν επίπεδο μπορεί να μας οδηγήσει, είτε στη μια κατεύθυνση είτε στην άλλη. Η επιλογή της (11) είναι όχι καλά καθορισμένη. Αντιθέτως το διάνυσμα-γινόμενο της (10) είναι πολύ καλά ορισμένο όπως και αν στήσει κανείς το σύστημα των αξόνων στο επίπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$ (βλ. σχήμα). Το “ $\odot$ ” γινόμενο θα άλλαζε φορά αν στήναμε το σύστημα συντεταγμένων αλλοιώτικα.



Σχήμα 13: Το εξωτερικό γινόμενο, με τη σύμβαση του δεξιού χεριού, και την αντισυμμετρική κατασκευή του, μέσω των συντεταγμένων, οδηγεί στο ίδιο διάνυσμα όπως και αν κοιτάξουμε το επίπεδο των διανυσμάτων, είτε αν το κοιτάξουμε από πάνω (αριστερά), είτε από κάτω (δεξιά).

Στην ερώτηση πώς θα κατασκευάζαμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του τρισδιάστατου χώρου θα αρκεστούμε να γράψουμε τη μορφή του εξωτερικού γινομένου μέσω των 3 συντεταγμένων των δύο διανυσμάτων

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \ ,$$

χωρίς να εξηγήσουμε αυτή την περίπλοκη κατασκευή[30]. Αυτό θα γίνει κατανοητό αργότερα όταν θα εισάγουμε την έννοια των πινάκων και των οριζουσών. Η περίπτωση που

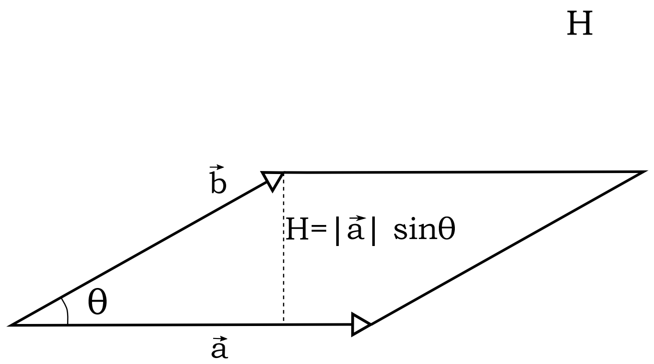
[30]Σε όποιον επιμένει να καταλάβει πως προέκυψε αυτή η μορφή θα μπορούσε να καθυσηχάσει τον εαυτό του σκεπτόμενος ως ακολούθως: Αν ορίσουμε τα 3 μοναδιαία διανύσματα επί των αξόνων x, y, z, ως $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$, αντίστοιχα και υπολογίσουμε αποτέλεσμα των εξωτερικών γινομένων $\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$, $\hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x$, $\hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y$, ακολουθώντας, κάθε φορά, τον κανόνα του δεξιού χεριού που συζήτησαμε παραπάνω τότε το αποτέλεσμα του εξωτερικού γινομένου των (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) θα είναι

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) &= (a_1 \hat{e}_x + a_2 \hat{e}_y + a_3 \hat{e}_z) \times (b_1 \hat{e}_x + b_2 \hat{e}_y + b_3 \hat{e}_z) = \ldots \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_y \times \hat{e}_z + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_z \times \hat{e}_x + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_x \times \hat{e}_y \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \ . \end{aligned} \tag{12}$$

είδαμε πιο πάνω ήταν η περίπτωση που τα δύο διανύσματα ανήκαν στο επίπεδο $x-y$ και επομένως $a_3 = b_3 = 0$. Επομένως αυτομάτως μηδενίζονταν οι x, y συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου και η μοναδική συνιστώσα που έμενε ήταν η z που εμπεριείχε την αναλλοίωτη αντισυμμετρική ποσότητα $a_1b_2 - a_2b_1$. Αξίζει να παρατηρήσετε τη δομή αυτή της κατασκευής: (α) κάθε συντεταγμένη είναι αντισυμμετρικά κατασκευασμένη ως προς εναλλαγή των a και b συντεταγμένων και (β) κάθε συντεταγμένη προκύπτει από την προηγούμενή της αν κάνει κανείς στις διάφορες συντεταγμένες την κυκλική μεταβολή

$$1 \to 2 \to 3 \to 1 \,.$$

Αυτή η κατασκευή γινομένων από συνιστώσες των δύο διανυσμάτων με τα προαναφερθέντα περίεργα χαρακτηριστικά θα γίνει πιο κατανοητή σε επόμενο κεφάλαιο. Προς το παρόν θα παραμείνει απλώς μια περίεργη κατασκευή, που το ανάλογό της όταν τα δύο διανύσματα ανήκουν στον δισδιάστατο επίπεδο $x-y$ θα έχει μέτρο όσο το 2ο αναλλοίωτο (το αντισυμμετρικό) που ορίστηκε, μέσω του γινομένου $\star_4$, παραπάνω. Υπάρχει, όμως, μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική ιδιότητα αυτού του αναλλοιώτου που θα ήταν καλό να την επισημάνουμε. Ας υπολογίσουμε τη z-συνιστώσα του εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων του επιπέδου $x-y$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ (με αυτή τη σειρά), αν φροντίσουμε να "στήσουμε" τον άξονα x όπως στο σχήμα 9, δηλαδή στην κατεύθυνση του $\vec{a}$:



Σχήμα 14: Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι $|\vec{a}|H = |\vec{a}|(|\vec{b}|\sin\theta)$ εφόσον η γωνία είναι θετική.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a, 0, 0) \times (|\vec{b}|\cos\theta, |\vec{b}|\sin\theta, 0) \\
&= (0, 0, a|\vec{b}|\sin\theta - 0 \cdot |\vec{b}|\cos\theta) \\
&= a|\vec{b}|\sin\theta\,(0, 0, 1) \,.^{31}
\end{aligned} \tag{13}$$

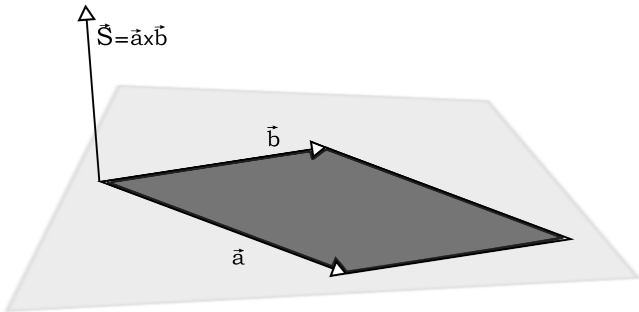
Ο αριθμός εκτός του διανύσματος είναι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου και το διάνυσμα $(0, 0, 1)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση του εξωτερικού

[31] Προφανώς το "$\cdot$" στην έκφραση $0\cdot$ δεν έχει καμία σχέση με εσωτερικό γινόμενο. Το βάλαμε για να δηλώσουμε γινόμενο διακριτών αριθμών, ώστε να μην υπάρχει σύγχυση.

γινομένου (ο “μοναδιαίος αντίχειρας” του δεξιού μας χεριού). Ο αριθμός $a|\vec{b}|\sin\theta = a(|\vec{b}|\sin\theta)$ δεν είναι τίποτε άλλο από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ (το ίδιο παραλληλόγραμμο που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε γραφικά το άθροισμα και τη διαφορά δύο διανυσμάτων). Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί να ορίσουμε γενικά μια επιφάνεια ως ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια. Για παράδειγμα, το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορούμε να λέμε ότι έχει επιφάνεια

$$\vec{S}_{\vec{a},\vec{b}} = \vec{a} \times \vec{b}\,.$$

Το μεν μέτρο του διανύσματος αυτού θα είναι ακριβώς το εμβαδόν του παραλληλο-



Σχήμα 15: Η επιφάνεια ως εξωτερικό γινόμενο.

γράμμου, η δε κατεύθυνσή του θα είναι κάθετη στην επιφάνειά του, δηλαδή θα είναι κάθετο και στο $\vec{a}$ και στο $\vec{b}$. Η φορά του διανύσματος του εξωτερικού γινομένου θα σχετίζεται με το πως σχηματίσαμε το εξωτερικό γινόμενο, βάζοντας πρώτα το $\vec{a}$ ή το $\vec{b}$. Αλλάζοντας τη διάταξή τους θα αλλάζει και η φορά. Με άλλα λόγια αυτό που ονομάζουμε επιφάνεια είναι ένα προσανατολισμένο διάνυσμα κι αυτό είναι μεγάλο κέρδος αφού μια επιφάνεια έχει προφανώς δύο όψεις: την “από πάνω” και την “από κάτω”. Το εξωτερικό γινόμενο μας δίνει τη δυνατότητα να πάρουμε είτε τη μια, είτε την άλλη. Καλά θα πείτε όλα αυτά, αν μιλάμε για την επιφάνεια ενός παραλληλογράμμου. Τι γίνεται, όμως, αν μιλάμε για την επιφάνεια ενός κύκλου; Η απάντηση είναι διαμερίστε απλώς τον κύκλο σε πολύ μικρά παραλληλογραμμάκια και προσθέστε όλες τις μικροσκοπικές επιφάνειες αυτών, αλλά φροντίστε να προσανατολίσετε όλα τα μικρά εξωτερικά γινόμενα με όμοιο τρόπο ώστε τελικά να προσθέσετε τις κοινές τους όψεις.

1.9.1 Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

Από το μέτρο του εξωτερικού γινομένου που υπολογίσαμε πρωτύτερα, είναι ξεκάθαρο ότι όταν δύο διανύσματα είναι παράλληλα (ομόρροπα ή αντίρροπα) το εξωτερικό τους γινόμενο είναι 0 (λόγω του $\sin\theta$ για $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$). Αυτό λοιπόν είναι και ένα κριτήριο παραλληλίας δύο διανυσμάτων.

Επίσης η σχέση του εσωτερικού γινομένου μέσω του $\cos\theta$ και του εξωτερικού γινομένου μέσω του $\sin\theta$ οδηγεί στη σχέση

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2.$$

Προσέξτε ότι το πρώτο γινόμενο είναι αριθμός, ενώ το δεύτερο είναι διάνυσμα, οπότε τα τετράγωνά τους είναι γραμμένα λίγο διαφορετικά.

Ας δοκιμάσουμε να αναμίξουμε τώρα τα δύο γινόμενα. Π.χ. το

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$$

τι είναι;
Απάντηση: Μια βλακώδης παράθεση διανυσμάτων. Το $\times$ δεν έχει καμία θέση αν αριστερά του βρίσκεται αριθμός και όχι διάνυσμα.
Μήπως το

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,; \tag{14}$$

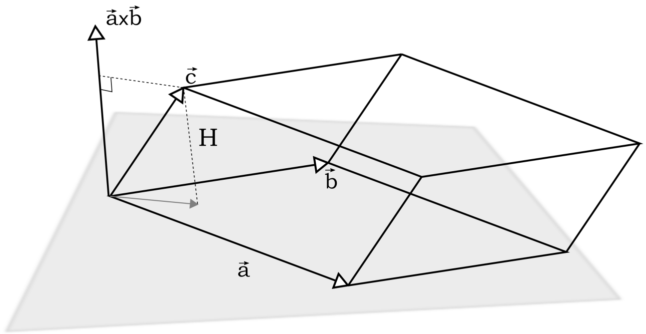
Αυτό μάλιστα. Το $\vec{a}\times\vec{b}$, είναι ένα γνήσιο διάνυσμα (για την ακρίβεια ένα ψευδοδιάνυσμα, όπως θα εξηγήσουμε αργότερα) πολλαπλασιασμένο εσωτερικά με ένα τρίτο διάνυσμα. Πρόκειται δηλαδή για έναν καθαρό αριθμό, μια βαθμωτή (ή πιο σωστά μια ψευδοβαθμωτή) ποσότητα. Ας δούμε τι κρύβει, από γεωμετρικής άποψης, η κατασκευή αυτή. Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, ορίζει όπως είπαμε, μια προσανατολισμένη επιφάνεια, αυτή του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ από την πλευρά που δείχνει ο αντίχειρας του δεξιού χεριού, αν τα διπλωμένα δάχτυλα (του ίδιου χεριού) διαγράφουν τη μικρότερη γωνία μεταξύ των $\vec{a},\vec{b}$, από το πρώτο προς το δεύτερο. Το διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου εκτείνεται σαν κατάρτι κάθετα στο παραλληλόγραμμο, προς την προαναφερθείσα πλευρά. Το εσωτερικό γινόμενο αυτού του διανύσματος με το $\vec{c}$, θα δώσει το μέτρο της προβολής του $\vec{c}$ στη διεύθυνση του καταρτιού $\vec{a}\times\vec{b}$, επί το μέτρο του $\vec{a}\times\vec{b}$. Δηλαδή θα σχηματίσει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ αφού η προβολή του $\vec{c}$ δεν είναι άλλη από το ύψος του παραλληλεπιπέδου που αντιστοιχεί στη βάση των $\vec{a},\vec{b}$. Όμορφο αποτέλεσμα ε;

Και ο όγκος αυτός, όμως, είναι προσανατολισμένος. Αν το $\vec{c}$ εκτείνεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η κατεύθυνση του $\vec{a}\times\vec{b}$, ο όγκος θα είναι θετικός, λόγω θετικού $\cos\theta_{\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}}$. Αν το $\vec{c}$ εκτείνεται στο άλλο ημιεπίπεδο ο όγκος θα είναι αρνητικός.

Άσκηση: Θα μπορούσατε με βάση τα όσα είπαμε να υπολογίσετε την ποσότητα $(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$ ή την $(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$;

Στη συνέχεια θα δοκιμάσουμε να φτιάξουμε ένα διπλό εξωτερικό γινόμενο από τρία διανύσματα:

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}$$



Σχήμα 16: Το διπλό εξωτερικό-εσωτερικό γινόμενο της 14 ως όγκος ενός παραλληλεπιπέδου.

Προφανώς το αποτέλεσμα θα είναι ένα νέο διάνυσμα αφού κάθε φορά που σχηματίζουμε ένα εξωτερικό γινόμενο σχηματίζετε και από ένα νέο διάνυσμα. Μήπως όμως θα πρέπει να είμαστε λίγο πιο συντηρητικοί στη γραφή μας; Μήπως έχει σημασία ποιο εξωτερικό γινόμενο θα σχηματίσουμε πρώτα και ποιο μετά; Ας δοκιμάσουμε λοιπόν να καασκευάσουμε το πιο καθαρό, ως προς το νόημά του,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\,;$$

Το διάνυσμα αυτό είναι σίγουρα κάθετο στο $\vec{c}$, αλλά θα είναι και κάθετο στο $\vec{a} \times \vec{b}$. Μα το δεύτερο αυτό διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$. Δηλαδή το ζητούμενο διάνυσμα είναι κάθετο στην κάθετη σε αυτό το επίπεδο. Με άλλα λόγια, το ζητούμενο διάνυσμα βρίσκεται πάνω σε αυτό το επίπεδο. Το γεγονός αυτό μας προσφέρει μια εξαίσια πληροφορία. Μπορούμε άνετα να γράψουμε

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$$

όπου τα λ_1, λ_2 είναι κατάλληλοι συντελεστές που θα ορίσουν ποιο ακριβώς είναι το ζητούμενο διάνυσμα στο επίπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$. Δεν πρέπει να ξεχνάμε, όμως, ότι όλες οι κατασκευές γινομένων διανυσμάτων (είτε εσωτερικών, είτε εξωτερικών) θα πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις των συμμετεχόντων στο γινόμενο διανυσμάτων. Επομένως το λ_1 πρέπει να είναι ένας αριθμός που φτιάχνεται από τα διανύσματα $\vec{b}, \vec{c}$ και το λ_2 ένας αριθμός που φτιάχνεται από τα $\vec{a}, \vec{c}$. Και ποιος είναι ο μοναδικός αναλλοίωτος αριθμός που φτιάχνεται από τα $\vec{b}, \vec{c}$ και είναι γραμμικός στα $\vec{b}, \vec{c}$; Η απάντηση, όπως δείξαμε, είναι το $\vec{b} \cdot \vec{c}$, ή οποιοδήποτε προκαθορισμένο πολλαπλάσιο αυτού, $\kappa_1(\vec{b} \cdot \vec{c})$. Ομοίως και για το λ_2. Συνοπτικά, λοιπόν, οδηγηθήκαμε στο αποτέλεσμα

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \kappa_1(\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a} + \kappa_2(\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b}$$

χωρίς να εκτελέσουμε καμία πράξη εξωτερικού γινομένου! Μένει τώρα να καθορίσουμε τους απροσδιόριστους ακόμη συντελεστές κ_1, κ_2. Με δύο απλές δοκιμές θα μάθουμε τους συντελεστές αυτούς. Ας σχηματίσουμε πρώτα το διπλό εξωτερικό γινόμενο των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$(\hat{x} \times \hat{y}) \times \hat{x} = \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} = \kappa_1(\hat{y} \cdot \hat{x})\hat{x} + \kappa_2(\hat{x} \cdot \hat{x})\hat{y} = \kappa_1 \cdot 0\ \hat{x} + \kappa_2\hat{y} = \kappa_2\hat{y}.$$

Το κ_2, λοιπόν, θα πρέπει να είναι ο αριθμός 1.

Ας σχηματίσουμε τώρα το διπλό εξωτερικό γινόμενο των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$(\hat{x} \times \hat{y}) \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} = \kappa_1(\hat{y} \cdot \hat{y})\hat{x} + \kappa_2(\hat{x} \cdot \hat{y})\hat{y} = \kappa_1\hat{x} + \kappa_2 \cdot 0\ \hat{y} = \kappa_1\hat{x}.$$

Το κ_1, λοιπόν, θα πρέπει να είναι ο αριθμός -1. Καταλήξαμε, λοιπόν, στο εκπληκτικό και χρήσιμο αποτέλεσμα

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b} \cdot \vec{c})\ \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b}\ . \tag{15}$$

Τώρα πλέον μπορούμε να ελέγξουμε αν αυτό είναι ίδιο με το αποτέλεσμα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, ώστε να μην έχει σημασία αν θα βάλουμε ή όχι παρενθέσεις. Η σύντομη απάντηση είναι, προφανώς *όχι*, αφού αυτό το διάνυσμα θα κείται στο επίπεδο των $\vec{b}, \vec{c}$ και όχι των $\vec{a}, \vec{b}$, όπως το προηγούμενο διπλό γινόμενο. Ας το υπολογίσουμε φέρνοντάς το σιγά-σιγά στην προηγούμενη καλοσχηματισμένη έκφραση, εκμεταλλευόμενοι απλώς την αντισυμμετρία των εξωτερικών γινομένων:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = -\left[-(\vec{c} \cdot \vec{a})\ \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a})\ \vec{c}\right] = (\vec{c} \cdot \vec{a})\ \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\ \vec{c}\ .$$

Καμία σχέση με την προηγούμενη έκφραση (15).

Όπως τονίσαμε πολλές φορές στο παρελθόν, το εξωτερικό γινόμενο σχηματίζει ένα καλά καθορισμένο διάνυσμα από δύο τρισδιάστατα διανύσματα, για το οποίο, σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο, έχει σημασία η σειρά των διανυσμάτων. Η πράξη αυτού του γινομένου είναι εκ κατασκευής αντισυμμετρική, όπως λέμε. Μόνο που δεν είχαμε άλλη επιλογή από το να το φτιάξουμε αντισυμμετρικό αν θέλαμε να είναι διάνυσμα. Το διάνυσμα αυτό δεν έχει άλλο χώρο να ξεδιπλωθεί παρά κάθετα στους δύο παράγοντες-διανύσματα του γινομένου. Η καθετότητα, όμως, αυτή κρύβει μια αμφιγνωμία ως προς τη φορά. Η αντισυμμετρικότητα του εξωτερικού γινομένου υπάρχει για να άρει αυτή την απροσδιοριστία της φοράς. Σχηματίζοντας το $\vec{a} \times \vec{b}$ λαμβάνουμε τη μία φορά, ενώ με το $\vec{b} \times \vec{a}$ λαμβάνουμε την άλλη. Το ποια διαλέγουμε να ορίσουμε κάθε φορά είναι θέμα σύμβασης, αν θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή το δεξιό ή το αριστερό μας χέρι. Κατά τ' άλλα, η αντισυμμετρία δεν επιδιώχθηκε, ήρθε απολύτως φυσικά.

Ας προχωρήσουμε την προηγούμενη παρατήρηση λίγο παραπάνω. Τι σχέση έχει το δεξί μας χέρι με το αριστερό; Το ένα είναι κατοπτρικό αντίγραφο του άλλου (αν εξαιρέσει κανείς τις λεπτομέρειες των πτυχώσεων του δέρματος). Τοποθετήστε τώρα τα χέρια σας το ένα απέναντι στο άλλο με τους αντίχειρες εκτεταμένους και τα δάχτυλα διπλωμένα. Το καθένα είναι κατ᾽ουσίαν η εικόνα του άλλου μέσα σε καθρέφτη. Έτσι ενώ ο καθρέφτης θα αναποδογύριζε (θα αντικατόπτριζε πιο σωστά) τα διπλωμένα δάχτυλα ο αντίχειρας θα έδειχνε στην ίδια κατεύθυνση με τον δεξιό αντίχειρα. Μόνο που το αριστερό χέρι (το κατοπτρικό) ακολουθεί την ανάποδη σύμβαση (ως προς τη φορά) του εξωτερικού γινομένου, επομένως ο ίδιας φοράς κατοπτρικός αντίχειρας δείχνει ανάποδα από το εξωτερικό γινόμενο των αντικατοπτρισμένων διανυσμάτων. Με άλλα λόγια το εξωτερικό γινόμενο έχει την ιδιότητα

$$\vec{a}' \times \vec{b}' = -(\vec{a} \times \vec{b})'$$

όπου οι τόνοι συμβολίζουν το αντίστοιχο κατοπτρικό διάνυσμα. Τα διανύσματα που έχουν την ιδιότητα όταν αντικατοπτρίζονται να αλλάζουν φορά ονομάζονται ψευδοδιανύσματα. Αν και στο επίπεδο που συζητάμε εδώ τα διανύσματα είναι γεωμετρικά αντικείμενα, ενώ τα κατοπτρικά τους φαντάσματα αποτελούν ασκήσεις της στερεοσκοπικής φαντασίας μας, στη Φυσική εμφανίζονται ενδιαφέρουσες διαφοροποιήσεις σε θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις οι οποίες δεν φέρονται απολύτως συμμετρικά σε πειράματα που αποτελούν κατοπτρικά αντίγραφα των αρχικών. Ένα τέτοιο σπάσιμο συμμετρίας εμφανίζεται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις και αποτέλεσε έκπληξη για τους φυσικούς της δεκαετίας του 1950. Μια αρκετά σύνθετη πυρηνική β-διάσπαση σε προσεκτικά πειράματα της κινεζοαμερικάνας Chien-Shiung Wu το 1956 έδειξε μια δαφοροποίηση της ασθενούς αλληλεπίδρασης σε κατοπτρικές διατάξεις. Η P-parity (συμμετρία σε κατοπτρισμούς) έκτοτε εκλαμβάνεται όχι πλέον ως προφανής συμμετρία του κόσμου μας και η περιγραφή της συμπεριφοράς του κόσμου μας γίνεται με καλά καθορισμένα γεωμετρο-φυσικά αντικείμενα (συγκεκριμένα, η ασθενής αλληλεπίδραση θα πρέπει να συνδέεται με κάποιο ψευδοδιανυσματικό πεδίο), οπότε καλό είναι να διακρίνουμε τα διανύσματα από τα ψευδοδιανύσματα.

Βασικά συμπεράσματα:

1. Τα διανύσματα είναι αυτόνομα γεωμετρικά-φυσικά αντικείμενα τα οποία έχουν υπόσταση ανεξαρτήτως του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιείται για να τα αναπαραστήσει.

2. Τα διανύσματα του επιπέδου (και γενικότερα του χώρου) είναι ελεύθερα να σχεδιαστούν σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου. Η μεταφορά τους γίνεται χωρίς να πειραχτεί η διεύθυνσή τους.

3. Ανάλογα με τη διάσταση του χώρου στον οποίο "ζουν" τα διανύσματα περιγράφονται από τόσες συντεταγμένες όσο είναι η διάσταση του χώρου.

4. Η πρόσθεση (και αφαίρεσή) δύο διανυσμάτων γίνεται γραφικά είτε με σχηματισμό του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είτε με τοποθέτησή τους το ένα μετά το άλλο. Αναφορικά με τις συντεταγμένες ισχύει
$$(a_1, a_2) \pm (b_1, b_2) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)\ .$$

5. Από δύο διανύσματα μπορεί κανείς να κατασκευάσει ένα βαθμωτό μέγεθος μέσω του εσωτερικού γινομένου:
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2\ .$$
Η παραπάνω ποσότητα είναι αναλλοίωτη και ανεξάρτητη του (καρτεσιανού) συστήματος αναφοράς στο οποίο υπολογίζονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων. Η αναλλοίωτη αυτή ποσότητα είναι ίση με
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta_{\vec{a},\vec{b}})\ .$$
Δυό μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα το ένα στο άλλο αν και μόνο αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

6. Το μέτρο ενός διανύσματος μπορεί να υπολογιστεί από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος με τον εαυτό του
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\ .$$

7. Μέσω δύο διανυσμάτων του τρισδιάστατου χώρου, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αναλλοίωτο νέο διάνυσμα-γινόμενο, το λεγόμενο εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\vec{a} \times \vec{b}$. Οι συντεταγμένες του είναι
$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (\underbrace{a_2 b_3 - a_3 b_2}_{\substack{\text{όχι} \\ \text{1-συντεταγμένες}}}, \underbrace{a_3 b_1 - a_1 b_3}_{\substack{\text{όχι} \\ \text{2-συντεταγμένες}}}, \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{\substack{\text{όχι} \\ \text{3-συντεταγμένες}}})\ ,$$
ακολουθώντας την κυκλική εναλλαγή $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

8. Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του τρισδιάστατου χώρου είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων και με φορά αυτή του αντίχειρα του δεξιού χεριού όταν τα διπλωμένα δάχτυλα στρέφονται από το πρώτο προς το δεύτερο. Το δε μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\theta_{\vec{a},\vec{b}})$$

9. Η προβολή ενός διανύσματος $\vec{a}$ πάνω σε ένα άλλο $\vec{b}$ δίνεται από την έκφραση

$$\text{προβ}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\,\vec{b}$$

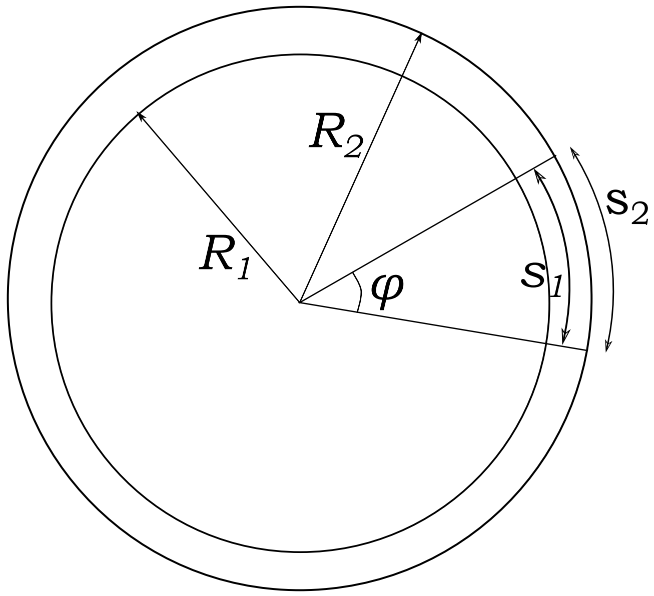
2 Γωνίες, σφαιρικές συντεταγμένες, στερεές γωνίες *(από τα βέλη στα τόξα...)*

Το πρώτο παράδειγμα με το οποίο ξεκινήσαμε τη συζήτηση για τα διανύσματα αναφερόταν στον προσδιορισμό της θέσης πάνω σε μια σφαίρα. Αναδείξαμε, λοιπόν, τη χρησιμότητα των γεωγραφικών συντεταγμένων (γεωγραφικού πλάτους και μήκους) ως τις πλέον κατάλληλες δυάδες αριθμών για τον καθορισμό της θέσης πάνω στην υδρόγειο. Οι αριθμοί αυτοί δήλωναν κάποιες γωνίες που ακροθιγώς περιγράφηκαν, αλλά πλέον θα πρέπει να τις ορίσουμε προσεκτικά από την αρχή και πρώτα απ' όλα θα πρέπει να μάθουμε να μετράμε και να αντιλαμβανόμαστε μια γωνία με κάθε δυνατό τρόπο.

2.1 Τι είναι η (επίπεδη) γωνία;

Το μικρό παιδί που καταλαβαίνει να σχεδιάσει το διπλάσιο ενός βέλους, γνωρίζει και τι είναι η γωνία: είναι, θα έλεγε, ο "χώρος" ανάμεσα σε δύο τοίχους. Αν ζητούσαμε μια αφαίρεση αυτής της διαισθητικά προφανούς έννοιας, ώστε να αναφερόμαστε σε γωνίες που σχηματίζονται στο επίπεδο, θα λέγαμε πως είναι ο περιεχόμενος "χώρος" που σχηματίζεται μεταξύ δύο ημιευθειών που έχουν κοινή αρχή, την επονομαζόμενη κορυφή της γωνίας.[32] Αν μας ζητούσαν να ποσοτικοποιήσουμε την έννοια της γωνίας, κατατάσσοντας τις επίπεδες αυτές γωνίες ως πιο μικρές ή πιο μεγάλες θα μπορούσαμε να το κάνουμε στρίβοντας όλες τις γωνίες καταλλήλως ώστε η μια ευθεία να είναι κοινή για όλες τις συγκρινόμενες γωνίες. Αυτή που πιάνει πιο πολύ χώρο θα είναι και η μεγαλύτερη. Μπορούμε να τους αποδώσουμε και τιμές ώστε να είμαστε σε θέση να τις συγκρίνουμε όχι άμεσα αλλά με σύγκριση των ταυτοτήτων τους; Μα φυσικά. Αυτό είναι πολύ απλό. Θα φτιάξουμε μια πρότυπη γωνία μεγέθους 1 και από αυτήν θα φτιάξουμε τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις της, όπως φτιάξαμε και τη μονάδα μήκους για να συγκρίνουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Αλήθεια, οι γωνίες έχουν διαστάσεις, σαν τα μήκη; Με βάση την προηγούμενη αντιστοιχία με τα ευθύγραμμα τμήματα θα έλεγε κανείς, ναι. Ποιες είναι όμως αυτές οι διαστάσεις; Διαστάσεις μήκους; Προφανώς, όχι. Οι γωνίες είναι ο χώρος ανάμεσα στις ημιευθείες, δεν είναι μονοδιάστατα αντικείμενα. Ε, τότε θα είναι επιφάνεια με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. Μα, η γωνία περιλαμβάνει άπειρο χώρο! Ποια επιφάνεια θα επιλέγαμε για να αποδώσουμε τιμή στη γωνία; Θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε έναν κύκλο ακτίνας 1, με κέντρο την κορυφή της γωνίας και να μετρήσουμε το εμβαδόν του κομματιού του κύκλου αυτού που "βλέπει" η γωνία. Καλή η κατασκευή αλλά όταν αλλάξουμε μονάδα μέτρησης μήκους θα σχεδιαστεί άλλος κύκλος και ο κυκλικός τομέας που ορίζει η γωνία θα έχει πιο μεγάλη επιφάνεια.

[32] Προφανώς πρέπει να διαλέξουμε σε ποια γωνία αναφερόμαστε: τον μικρότερο ή τον μεγαλύτερο χώρο μεταξύ των ημιευθειών.



Σχήμα 17: Μετρώντας τις γωνίες μέσω μηκών τόξων.

Ας αλλάξουμε τρόπο θεώρησης των γωνιών. Ας σχεδιάσουμε πάλι έναν κύκλο κεντραρισμένο στην κορυφή της γωνίας και ας μετρήσουμε το μήκος του κυκλικού τόξου που βρίσκεται εντός της γωνίας. Το μήκος αυτό είναι τόσο μεγαλύτερο, όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία, αλλά και όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του κύκλου. Λόγω ομοιότητας, όμως, ο λόγος του μήκους του τόξου προς την ακτίνα του κύκλου είναι σταθερός, όποια και αν είναι η ακτίνα του κύκλου. Αυτός ο σταθερός λόγος είναι που βολεύει αφάνταστα στη μέτρηση των γωνιών. Η προηγούμενη πρόταση περί εμβαδού, θα μπορούσε να είναι μια εναλλακτική πρόταση μέτρησης των γωνιών, αν διαιρούσαμε το εμβαδόν με το τετράγωνο της ακτίνας του σχεδιασθέντος κύκλου. Ο λόγος θα ήταν πάλι σταθερός και ανεξάρτητος του μεγέθους του κύκλου. Απλώς μάλλον είναι ευκολώτερη η μέτρηση ενός μήκους (του κυκλικού τόξου) παρά ενός εμβαδού (του κυκλικού τομέα).

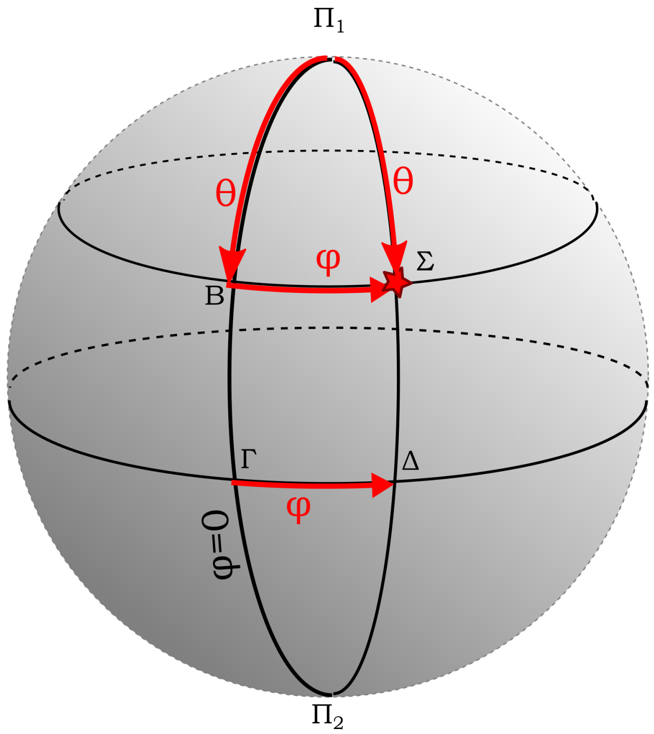
Επομένως θα χρησιμοποιούμε πολύ συχνά τη μέτρηση των γωνιών μέσω του μήκους s του αντίστοιχου κυκλικού τόξου και θα σημειώνουμε ότι

$$\phi = \frac{s}{R}\, \textit{rad}\, .$$

Το μέγεθος αυτό που μετριέται σε radians (rad) είναι προφανώς αδιάστατο, ενώ η μονάδα μέτρησης δεν έχει διαστάσεις χρησιμοποιείται για να μας θυμίζει πως μετρήθηκε. Δηλαδή ότι το μήκος τόξου συγκρίθηκε με την ακτίνα R του κύκλου. Έτσι, η γωνία που αντιστοιχεί σε ένα πλήρη κύκλο έχει μέγεθος 2π *rad*, ενώ μια ορθή γωνία ισούται με $\pi/2$ *rad*. Κατόπιν αυτής της συζήτησης δεν θα πρέπει να σας φαίνεται καθόλου παράξενο να σημειώνουμε τις γωνίες επί ενός κύκλου, σαν να σημειώναμε μήκη τόξων, αντί να τις σημειώνουμε στον περιεχόμενο χώρο μεταξύ των ημιευθειών που σχηματίζουν αυτή τη γωνία.

2.2 Σφαιρικές συντεταγμένες

Πάνω σε μία σφαίρα μπορούμε να καθορίσουμε δύο αντιδιαμετρικά σημεία, τους πόλους της σφαίρας, Π_1, Π_2. Ο ένας από τους δύο πόλους, ο Π_1, θα παίζει το ρόλο της αρχής των συνεταγμένων του καρτεσιανού συστήματος. Από εκεί θα μετράμε τη μία γωνία θ προσδιορισμού της θέσης προχωρώντας κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου $\Pi_1\Sigma\Delta\Pi_2\Pi_1$,[33] δηλαδή, ενός κύκλου που διέρχεται από τους δύο πόλους και έχει



Σχήμα 18: Οι σφαιρικές συντεταγμένες, σημειωμένες ως τα τόξα στα οποία αντιστοιχούν.

κοινό κέντρο με τη σφαίρα. Επειδή όμως ένα σημείο αυτού του κύκλου θα έχει δύο δυνατές γωνίες, ανάλογα με το ποια φορά θα διαλέξουμε για να κινηθούμε πάνω σε αυτό το μέγιστο κύκλο, αποφεύγουμε να κατασκευάσουμε ολόκληρο το μέγιστο κύκλο που διέρχεται από τους πόλους και κατασκευάζουμε ημικύκλια μέγιστων κύκλων που διέρχονται από τους πόλους. Για κάθε σημείο της σφαίρας μπορούμε να βρούμε

[33] Μέγιστος κύκλος είναι ένας κύκλος στην επιφάνεια μιας σφαίρας που έχει το μέγιστο δυνατό μέγεθος. Προκύπτει από την τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο του. Εκτός αυτών μπορούν να σχεδιαστούν και άλλοι κύκλοι πάνω σε μια σφαίρα. Τα επίπεδα αυτών δεν διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας.

ένα τέτοιο ημικύκλιο που να διέρχεται από αυτό, οπότε η γωνία θ που αντιστοιχεί στο σημείο είναι η μοναδική, πλέον, γωνία από τον πόλο-αφετηρία ως το εν λόγω σημείο $\theta = \Pi_1\Sigma$. Προφανώς οι τιμές που λαμβάνει αυτή η γωνία είναι στο διάστημα $\theta \in [0, \pi]$. Η δεύτερη γωνία ϕ προσδιορισμού του σημείου είναι μια γωνία που σηματοδοτεί ποιο ημικύκλιο μέγιστου κύκλου είναι αυτό που διέρχεται από το σημείο. Πώς μετριέται αυτή η γωνία; Αν φτιάξουμε είτε το μέγιστο κύκλο ΓΔΓ, που είναι κάθετος στον άξονα της σφαίρας, ο οποίος διέρχεται από τους πόλους, είτε οποιονδήποτε άλλο κύκλο παράλληλο σε αυτόν, ΒΣ, μπορούμε πάνω σε οποιονδήποτε από αυτούς να μετρήσουμε τη γωνία από κάποια προκαθορισμένη αρχή, μέχρι να φτάσουμε στο μέγιστο ημικύκλιο $\Pi_1\Sigma\Delta\Pi_2$, που διέρχεται από το σημείο μας. Για αρχή μέτρησης όλων των γωνιών μπορούμε να επιλέξουμε την τομή ενός προκαθορισμένου μέγιστου ημικυκλίου, του $\Pi_1\mathrm{B}\Gamma\Pi_2$ με οποιονδήποτε από τους προαναφερθέντες παράλληλους κύκλους (το Γ ή το Β, αντίστοιχα). Η γωνία ϕ ορίζεται στο διάστημα $\phi \in [0, 2\pi)$.[34]

Ας φτιάξουμε και ένα καρτεσιανό τρισορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα με κέντρο τη σφαίρα, ώστε να συσχετίσουμε τις σφαιρικές γωνίες θ, ϕ του σημείου Σ με τις καρτεσιανές συντεταγμένες του. Ας επιλέξουμε την αρχή του καρτεσιανού συστήματος στο κέντρο της σφαίρας, ας προσανατολίσουμε τον z-άξονα προς τον πόλο Π_1 και τον x-άξονα να διέρχεται από το μέγιστο ημικύκλιο $\phi = 0$. Οι επιλογές αυτές είναι οι συνήθεις και εξυπηρετούν στην απλοποίηση των σχέσεων $(\theta, \phi) \leftrightarrow (x, y, z)$.[35] Προφανώς θα μπορούσαμε όμως να στρέψουμε τους άξονες του καρτεσιανού συστήματος, όπως θέλουμε, αλλά θα το πληρώναμε κατασκευάζοντας εξαιρετικά πολύπλοκες σχέσεις. Στο εσωτερικό της σφαίρας έχουμε σχεδιάσει την ακτίνα ΚΣ, το ίχνος του Σ στο επίπεδο $x - y$, την προβολή του Σ' στους άξονες x, y, και την προβολή του Σ στον άξονα z (το τρίγωνο ΚΖΣ είναι ορθογώνιο με την $\hat{Z} = \pi/2$). Τώρα είναι πολύ απλό να δούμε ότι

$$\begin{aligned} z &= (\mathrm{KZ}) = R\cos\theta \,, \\ & \quad\ (\mathrm{K}\Sigma') = R\sin\theta \,, \\ x &= (\mathrm{KX}) = R\sin\theta\cos\phi \,, \\ y &= (\mathrm{KY}) = R\sin\theta\sin\phi \,, \end{aligned} \tag{16}$$

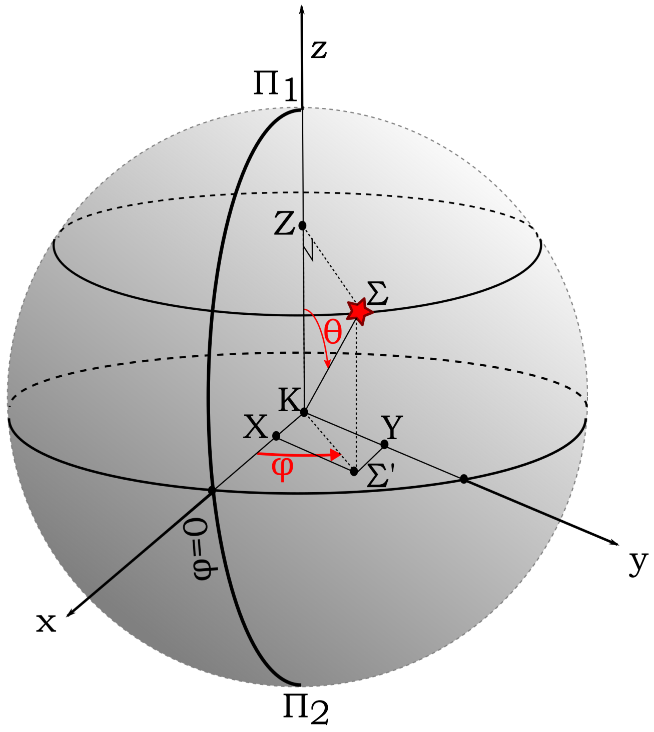
όπου R η ακτίνα της σφαίρας και (x, y, z) οι καρτεσιανές συντεταγμένες του Σ.

Αν θέλαμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, από τις καρτεσιανές στις σφαιρικές, θα είχαμε ότι

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \,,$$

[34]Το διάστημα είναι ανοιχτό δεξιά γιατί η γωνία 2π συμπίπτει με την 0.

[35]Η περίεργη μεταβίβαση από 2 συντεταγμένες σε 3 οφείλεται στο ότι σχεδιάσαμε τη σφαίρα που διέρχεται από το εν λόγω σημείο, επομένως η απόσταση του Σ από το κέντρο της σφαίρας θεωρείται δεδομένο. Αν θέλαμε να καθορίσουμε ένα τυχαίο σημείο στο χώρο με σφαιρικές συντεταγμένες θα χρειαζόμασταν, εκτός των θ, ϕ, και την απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 19: Η ανατομία της σχέσης σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων.

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}(z/R) \,, \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) \,. \end{aligned} \tag{17}$$

Επειδή οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις[36] απαιτούν κάποιους λεπτούς χειρισμούς καθότι είναι αντίστροφες συναρτήσεις μη μονοτόνων συναρτήσεων. Επειδή γωνία θ περιορίζεται στο διάστημα $[0, \pi]$ δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα με την $\cos^{-1}(z/R)$, εφόσον $z \in [-R, +R]$. Αντιθέτως η $\tan^{-1}(y/x)$ δεν είναι καλά καθορισμένη ώστε να δώσει κάθε δυνατή γωνία $\phi \in [0, 2\pi)$. Θα πρέπει να διορθωθεί ως ακολούθως:

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) \,, & y \geq 0 \text{ και } x \neq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi \,, & y < 0 \text{ και } x \neq 0 \\ \pi/2 \,, & y \geq 0 \text{ και } x = 0 \\ 3\pi/2 \,, & y < 0 \text{ και } x = 0 \end{cases}$$

Ο λόγος αυτών των σχολαστικών διορθώσεων είναι γιατί ο λόγος $y/x = (-y)/(-x)$, παρόλο που τα (x, y) και $(-x, -y)$ ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια και άρα αντιστοιχούν σε διαφορετικές γωνίες ϕ.

[36]Οι $\cos^{-1}, \tan^{-1}$ δεν είναι οι συναρτήσεις $1/\cos, 1/\tan$, αλλά οι αντίστροφες των $\cos, \tan$, αντίστοιχα.

Τώρα πλέον μπορούμε να χρησιμοποιούμε είτε τις μεν, είτε τις δε συντεταγμένες, προκειμένου να εκτελέσουμε οποιονδήποτε υπολογισμό, όπως για παράδειγμα ποια είναι η απόσταση δύο σημείων στη σφαίρα με συντεταγμένες (θ_1, ϕ_1) και (θ_2, ϕ_2).

Κλείνοντας ας προσέξουμε ότι στις σφαιρικές συντεταγμένες κρύβεται μια ανώμαλη απεικόνιση των πόλων. Π.χ. ο πόλος Π_1 έχει σφαιρικές συντεταγμένες $\theta = 0$, και ϕ οτιδήποτε! Οι σφαιρικές συντεταγμένες δεν μπορούν μονοσήμαντα να απεικονίσουν τους πόλους. Αν τους αφήναμε εκτός συζήτησης θα ήταν όλα τα σημεία μονοσήμαντα καθορισμένα μέσω των σφαιρικών συντεταγμένων. Δυστυχώς όμως δεν θα μπορούσαμε να καλύψουμε όλη τη σφαίρα. Αν, όμως, φτιάχναμε δύο τέτοια συστήματα σφαιρικών συντεταγμένων διαλέγοντας και ένα δεύτερο ζευγάρι αντιδιαμετρικών σημείων θα μπορούσαμε να καλύψουμε όλη τη σφαίρα χωρίς καμία απώλεια, ο ένας *χάρτης*[37] (όπως αποκαλείται) θα έχανε τη δυνατότητα να καλύψει κάποιες περιοχές, ενώ ο δεύτερος (διπλός) χάρτης θα κάλυπτε αυτές, αφήνοντας απ' έξω τα προβληματικά γι' αυτόν σημεία. Η σύνθετη αυτή κατασκευή, μερικώς αλληλεπικαλυπτόμενων χαρτών, που αποκαλείται *άτλαντας*, οφείλεται στην ιδιαίτερη "κλειστή", τοπολογία της σφαίρας.

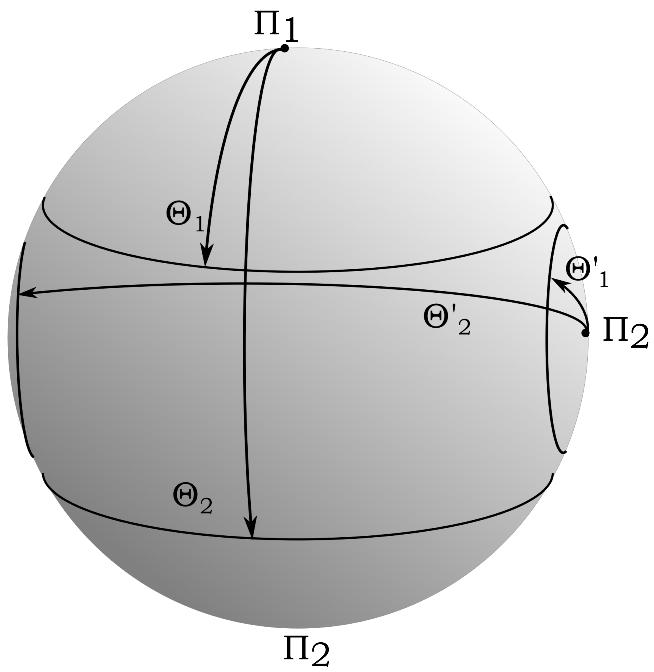
2.3 Η επιφάνεια της σφαίρας και η παρατήρηση του Αρχιμήδη.

Ο Αρχιμήδης που έζησε τον 3ο αιώνα π.Χ. υπολόγισε την επιφάνεια μιας σφαίρας μη διαθέτοντας τα εργαλεία του ολοκληρωτικού λογισμού, αν και έθεσε τις βάσεις αυτού. Το επίτευγμά του αυτό τον έκανε τόσο περήφανο, που είχε ζητήσει, απ' ότι φημολογείται, να σκαλιστεί στον τάφο του ένας κύλινδρος περιγεγραμμένος σε μια σφαίρα. Ο Αρχιμήδης έδειξε ότι η επιφάνεια μιας σφαίρας, ακτίνας R, ισούται με την παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου μέσα στον οποίο είναι εγγεγραμμένη (εφάπτεται) η σφαίρα. Επειδή η παράπλευρη επιφάνεια ενός τέτοιου κυλίνδρου είναι κατ' ουσίαν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ύψος $H = 2R$ και πλάτος $L = 2\pi R$, ο Αρχιμήδης συμπέρανε ότι η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι $4\pi R^2$.

Ας δούμε έναν τρόπο που ίσως ακολούθησε ο Αρχιμήδης προκειμένου να καταλήξει στο εν λόγω εντυπωσιακό αποτέλεσμα. Το σχεδόν παραλληλόγραμμο επί της σφαιρικής επιφάνειας έχει πλευρές $AD = R\ d\theta$ και $AB = R \sin\theta\ d\phi$, όπου (θ, ϕ) είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου , ενώ τα άλλα σημεία του παραλληλογράμμου έχουν συντεταγμένες που διαφοροποιούνται από αυτές του κατά $d\theta, d\phi$. Όμοια, η προβολή του παραλληλογράμμου στον κύλινδρο $A'B'C'D'$ έρχουν πλευρές $A'B' = AB \times [R/(R\sin\theta)] = Rd\phi$ και $A'D' = AD \times \cos(\pi/2 - \theta) = Rd\theta \sin\theta$, αφού το περίπου ευθύγραμμο τμήμα AD σχηματίζει γωνία $\pi/2 - \theta$ με το $A'D'$. Επομένως το εμβαδόν και των δύο παραλληλογράμμων είναι το ίδιο και ίσο με

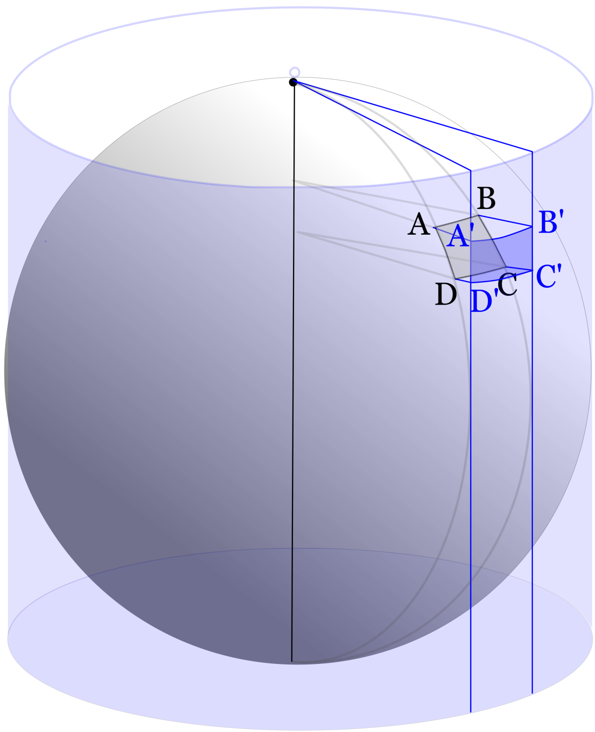
$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = R^2 \sin\theta\ d\theta\ d\phi$$

[37]Στην πραγματικότητα χρειάζονται δύο χάρτες για να εξασφαλιστεί η περιοδικότητα ως προς τη γωνία ϕ· βλ. Σχήμα 20.



Σχήμα 20: Μεταξύ των γωνιών Θ_1 και Θ_2 δημιουργείται μια κυλινδρόμορφη (βαρελοειδής) επιφάνεια την οποία μπορούμε να καλύψουμε με 2 χάρτες συντεταγμένων προκειμένου να εξασφαλίσουμε την περιοδικότητα του κυλίνδρου. Αντίστοιχα, μεταξύ των γωνιών Θ'_1 και Θ'_2 δημιουργείται μια δεύτερη κυλινδρόμορφη επιφάνεια την οποία μπορούμε να καλύψουμε με άλλους 2 χάρτες συντεταγμένων προκειμένου να εξασφαλίσουμε την περιοδικότητα και αυτού του κυλίνδρου.

αφού όσο μεγαλύτερη είναι η μία πλευρά του κυλινδρικού παραλληλογράμμου από αυτήν του σφαιρικού, ακριβώς τόσο μικρότερη είναι η άλλη πλευρά.



Σχήμα 21: Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου είναι ισεμβαδική με την επιφάνεια της σφαίρας γιατί η κάθε στοιχειώδης σφαιρική επιφάνεια $ABCD$ είναι ισεμβαδική με την προβολή της στον κύλινδρο $A'B'C'D'$.

Υπολογιστική διευκρίνιση: Στην παραπάνω ανάλυση αντιμετωπίσαμε το σφαιρικό τετράπλευρο $ABCD$ ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αυτό δεν είναι απόλυτα σωστό για πολλούς λόγους: (i) Πρόκειται για μια σφαιρική επιφάνεια. (ii) Η βάση CD που αντιστοιχεί σε πιο μεγάλο παράλληλο κύκλο (αυτή σε γωνία $\theta + d\theta$) είναι πιο μεγάλη από τη βάση AB. (iii) Οι γωνίες του τετραπλεύρου είναι όλες ορθές (τομές μεσημβρινών με παράλληλους κύκλους) παρά το ότι το τετράπλευρο είναι περισσότερο τραπέζιο ($CD > AB$) παρά παραλληλόγραμμο. Και τα τρία αυτά στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους, αλλά όλα συγκλίνουν σε διορθώσεις της επιφάνειας που είναι πολύ μικρότερες από την ίδια την επιφάνεια του $ABCD$ καθώς οι γωνίες $d\theta, d\phi$ είναι απειροστές (δηλαδή τείνουν στο 0). Για παράδειγμα το γεγονός του ότι το σχήμα είναι τραπέζιο θα μας οδηγούσε στον υπολογισμό

$$
\begin{aligned}
S_{ABCD} &= \frac{AB+CD}{2}AD\ ^{38} \\
&= \frac{R\sin(\theta)d\pi + R\sin(\theta+d\theta)d\phi}{2}Rd\theta \\
&= \frac{R\sin(\theta)d\pi + R[\sin(\theta)\cos(d\theta)+\sin(d\theta)\cos(\theta)]d\phi}{2}Rd\theta \\
&\simeq \left[R\sin(\theta)d\phi + \frac{Rd\theta\cos(d\theta)d\phi}{2}\right]Rd\theta\ ^{39} \\
&= R^2\sin(\theta)d\phi d\theta + \frac{R^2}{2}\cos(\theta)d\theta^2 d\phi
\end{aligned}
$$

Ο τελευταίος όρος εμπεριέχει 3 διαφορικές ποσότητες επομένως σε σύγκριση με τον πρώτο όρο είναι απειροστά μικρότερος και μπορεί να αμεληθεί. Όλοι οι παράγοντες απόκλισης του $ABCD$ από την παραλληλογραμμικότητα προκαλούν διορθώσεις στην επιφάνειά του απειροστές και μπορούν να αγνοηθούν.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι ο αριθμός π που υπεισέρχεται στην αναλογία της περιμέτρου του κύκλου με την ακτίνα του και στην αναλογία της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου με το τετράγωνο της ακτίνας του, εμφανίζεται και πάλι στην αναλογία της επιφάνειας της σφαίρας με το τετράγωνο της ακτίνας του. Το ίδιο συμβαίνει και με τον όγκο της σφαίρας όταν αυτός συγκρίνεται με ον κύβο της ακτίνας. Παραδόξως, κατασκευάζοντας την υπερσφαίρα σε 4 διαστάσεις, στις αντίστοιχες αναλογίες εμφανίζεται το τετράγωνο του π και το ίδιο συμβαίνει και στις 5 διαστάσεις. Κάθε 2 διαστάσεις εμφανίζεται μία παραπάνω δύναμη του π!

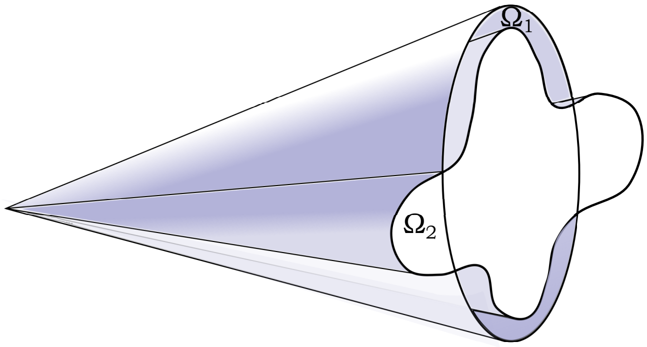
2.4 Στερεά γωνία

Κατ' αναλογία με τις επίπεδες γωνίες μπορεί να ορίσει κανείς και τη "στερεά γωνία" ως το χώρο σε μια κωνικού τύπου δέσμη ημιευθειών που ξεκινούν από μια κοινή κορυφή και σαρώνουν μια συνεχή επιφάνεια, αποκόπτοντας μέρος του συνολικού χώρου. Πώς μπορεί κανείς να μετρήσει αυτή τη στερεά γωνία χωρίς να αναφέρεται στον άπειρο (και άρα μη μετήσιμο) χώρο που περικλείει αυτή; Μάλιστα, σε αντίθεση με τις επίπεδες γωνίες, που θα μπορούσε κανείς να τις στρίψει ώστε η μικρότερη να "μπει" εξ ολοκλήρου μέσα στη μεγαλύτερη, στις στερεές γωνίες αυτό δεν είναι πάντα εφικτό,

[38]Δεδομένου ότι πρόκειται για τραπέζιο δεν θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε ως ύψος την πλαϊνή πλευρά AD. Όμως, η πλευρά αυτή είναι κάθετη στις βάσεις οπότε τι άλλο να χρησιμοποιήσουμε για ύψος του τετραπλεύρου;

[39]Στο σημείο αυτό αντικαταστήσαμε το $\cos(d\theta)$ με τη μονάδα και το $\sin(d\theta)$ με το $d\theta$ αφού η γωνία $d\theta$ είναι σχεδόν μηδενική.

ώστε να μπορούμε να τις συγκρίνουμε (βλ. Σχήμα 24). Ακολουθώντας το παράδειγμα

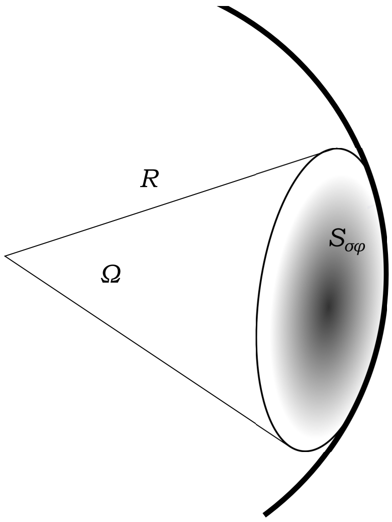


Σχήμα 22: Είναι δύσκολο να συγκρίνουμε στερεές σγωνίες τοποθετώντας τες την μία μέσα στην άλλη.

μέτρησης της επίπεδης γωνίας μέσω των μηκών τόξου, μπορούμε να κάνουμε μια αντίστοιχη μέτρηση της επιφάνειας μιας σφαίρας που αποκόβει μια στερά γωνία και να ορίσουμε τη στερεά γωνία ως

$$\Omega = \frac{S_{\sigma\varphi}}{R^2} \,. \tag{18}$$

Το σημαντικό είναι ότι η ποσότητα αυτή δεν εξαρτάται από την ακτίνα της σφαίρας



Σχήμα 23: Ορισμός της στερεάς γωνίας μέσω κάποιας βοηθητικής σφαίρας τυχαίας ακτίνας.

που θα χρησιμοποιήσουμε για τη μέτρησή της, ακριβώς όπως συμβαίνει και με τους κύκλους που χρησιμοποιήσαμε στις επίπεδες γωνίες, αφού το μέγεθος της επιφάνειας αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο της ακτίνας. Δεδομένου μάλιστα του ευρήματος ότι η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι $4\pi R^2$, η στερά γωνία που αντιστοιχεί σε όλο το χώρο γύρω από ένα σημείο είναι $\Omega_{\text{ολ}} = 4\pi$.

Θα δούμε στη συνέχεια πώς μπορούμε να εκτελέσουμε τον υπολογισμό μέτρησης της στερεάς γωνίας αν η επιφάνεια που έχουμε στη διάθεσή μας έχει οποιοδήποτε σχήμα. Για το λόγο αυτό ας θεωρήσουμε μια απειροστά λεπτή στερεά γωνία $d\Omega$ η οποία τέμνει μια τυχαία επιφάνεια σε απόσταση r από την κορυφή της στερεάς γωνίας και σε κατεύθυνση $\hat{r}$ από αυτήν. Δεδομένου ότι η στερεά γωνία είναι απειροστή τα διάφορα σημεία τομής της στερεάς γωνίας με την επιφάνεια βρίσκονται σε απειροστές αποστάσεις το ένα από το άλλο και επομένως δεν έχει νόημα να μιλάμε για διαφορετικές αποστάσεις και κατευθύνσεις αυτών από την κορυφή της στερεάς γωνίας. Παρά ταύτα αν σχηματίσουμε και μια σφαίρα με κέντρο την κορυφή της στερεάς γωνίας και ακτίνας r η τομή της στερεάς γωνίας με τη σφαίρα αυτή, αν και απειροστή, θα διαφοροποιείται από την αρχική τομή. Οι δύο απειροστές επιφάνειες θα βρίσκονται σε γωνία η μία ως προς την άλλη, αλλά και οι δύο θα εμπεριέχονται στη στερεά γωνία. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σχέση μεταξύ των δύο επιφανειών είναι

$$dS_{\text{σφ}} = dS \cos w \ ,$$

όπου w είναι η γωνία κατά την οποία είναι στραμμένη η μια επιφάνεια σε σχέση με την άλλη. Τη γωνία αυτή μπορούμε να την αναζητήσουμε μεταξύ των ευθείων που διέρχονται από τις δύο επιφάνειες και είναι κάθετες σε αυτές, δηλαδή, στη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $d\vec{S}_{\text{σφ}}$ και $d\vec{S}$. Μάλιστα, επειδή $d\vec{S}_{\text{σφ}} = dS_{\text{σφ}}\hat{r}$,

$$d\vec{S} \cdot \hat{r} = d\vec{S}_{\text{σφ}} \cdot \hat{r} \ .$$

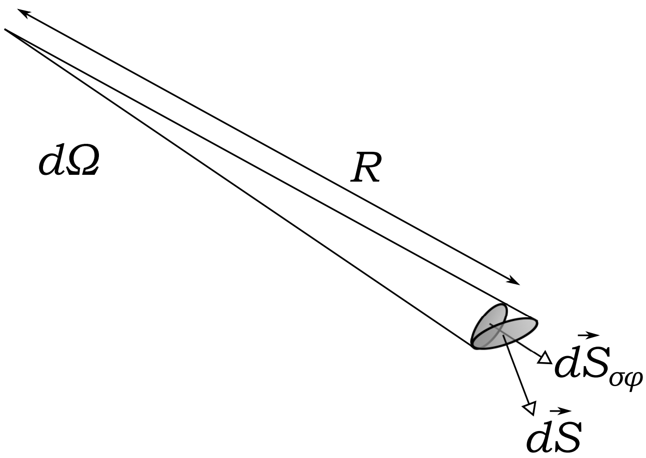
Επομένως μπορούμε να συσχετίσουμε τη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega$ με τη στοιχειώδη τυχαία επιφάνεια που αποκόπτει $d\vec{S}$ ως ακολούθως

$$d\Omega = \frac{dS_{\text{σφ}}}{r^2} = \frac{d\vec{S}_{\text{σφ}} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{d\vec{S} \cdot \hat{r}}{r^2} \ . \tag{19}$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται μια πεπερασμένης έκτασης επιφάνεια από ένα δοσμένο σημείο.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη στερεά γωνία που καλύπτει μια περιοχή που περιγράφεται από κάποιο εύρος σφαιρικών γωνιών. Στο εδάφιο που περιγράψαμε την παρατήρηση του Αρχιμήδη, είδαμε ότι μια στοιχειώδης επιφάνεια σφαίρας στην περιοχή των συντεταγμένων (θ, ϕ) δίνεται από τη σχέση

$$dS_{\text{σφ}} = R^2 \sin\theta \ d\theta \ d\phi \ .$$



Σχήμα 24: Η σχέση μεταξύ των επιφανειών $\vec{dS}_{\sigma\varphi}$ και $\vec{dS}$ που αποκόπτει μια στοιχειώδης στερεά γωνία $d\Omega$.

Η αντίστοιχη στερεά γωνία λοιπόν θα είναι

$$d\Omega = \sin\theta \; d\theta \; d\phi \; .$$

Αν ολοκληρώσουμε αυτή τη στοιχειώδη στερεά γωνία προκειμένου να καλύψουμε μια ολόκληρη κωνική περιοχή που απλώνεται στην περιοχή των $\theta \in [0, \Theta_0]$ αυτή θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\Omega_{\Theta_0} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\Theta_0} d\theta \sin\theta \;^{40} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \left[-\cos\theta\right]_0^{\Theta_0} \;^{41} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \left(-\cos\Theta_0 - (-\cos 0)\right) \\
&= (1-\cos\Theta_0) \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= (1-\cos\Theta_0) \left[\phi\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi(1-\cos\Theta_0) \; .
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα οδηγεί στα αναμενόμενα αποτελέσματα: $\Omega = 4\pi$ (ολόκληρος ο χώρος) όταν $\Theta_0 = \pi$ και στο $\Omega = 2\pi$ (ο μισός χώρος –από το ισημερνό επίπεδο και πάνω) όταν $\Theta_0 = \pi/2$.

Προφανώς αν δεν ενδιαφερόμαστε για ολόκληρο τον κώνο θα έπρεπε να περιορίσουμε τη γωνία ϕ, κατά την ολοκλήρωση, στο εύρος που εμείς επιθυμούμε.

Μια ενδιαφέρουσα φυσική παρατήρηση που προκύπτει από τον ορισμό της στερεάς γωνίας είναι η ακόλουθη: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροή $\Phi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S}$[42]που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια η οποία περιβάλει κάποια σημειακή φυσική ποσότητα από την οποία πηγάζει ένα "κεντρικό " διανυσματικό πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου της μορφής

$$\vec{A} = \frac{a}{r^2}\hat{r} \ .$$

Η ροή Φ θα είναι

$$\Phi = \int \frac{a}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{S} = a \int \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega \ ,$$

λόγω της (19), οπότε

$$\Phi = a \int d\Omega = 4\pi a \ ,$$

ανεξαρτήτως του μεγέθους της επιφάνειας, του σχήματος της επιφάνειας και της θέσης της πηγής του διανυσματικού πεδίου. Επιπλέον αν το διανυσματικό πεδίο πηγάζει από πολλές τέτοιες πηγές και η συμπεριφορά του είναι γραμμική, δηλαδή το συνολικό πεδίο κάπου είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από την κάθε πηγή χωριστά, τότε η συνολική ροή θα ισούται με το άθροισμα των ροών από την κάθε πηγή:

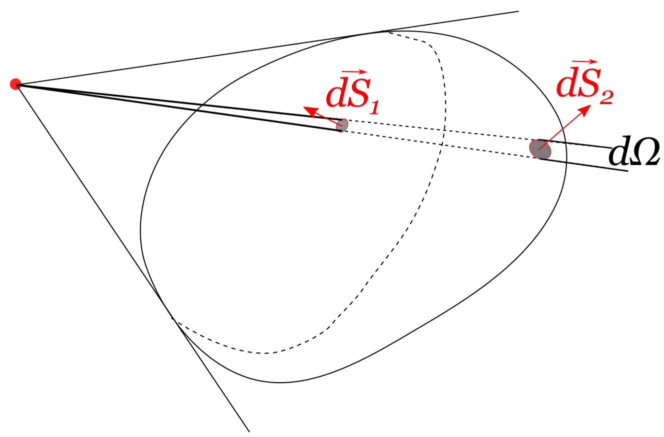
$$\Phi_{\text{ολ}} = 4\pi(a_1 + a_2 + \ldots) \ .$$

Αν κάποια πηγή δεν περιβάλλεται από την κλειστή επιφάνεια, η συνεισφορά της στη ροή θα είναι μηδενική. Το "έξω" μέρος της επιφάνειας (αυτό που κοιτά όχι προς την πηγή, αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση) θα έχει μια συνεισφορά κατά μια συνολική

[40]Δεδομένου ότι δεν είσαστε ακόμη εξοικειωμένη με τα ολοκλήρωματα, πόσω μάλλον με τα διπλά ολοκληρώματα, να σημειώσουμε ότι κάθε ολοκλήρωση υποδηλώνει μια άθροιση από απειροστές ποσότητες. Το διπλό αυτό ολοκλήρωμα υποδηλώνει μια άθροιση στοιχειωδών γωνιών μέχρι να καλυφθεί ολόκληρο το διάστημα των $\phi \in [0, 2\pi)$ καθώς και ολόκληρο το διάστημα των $\theta \in [0, \Theta_0]$. Η σειρά που γίνεται ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων είναι από μέσα προς τα έξω. Όως τα έχουμε γράψει θα ξεκινήσουμε με το ολοκλήρωμα $\int d\theta \sin\theta$ που ισούται με $-\cos\theta$ και στη συνέχεια προχωράμε στο ολοκλήρωμα $\int d\phi$ που ισούται με ϕ. Τα όρια των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιούνται λαμβάνοντας τη διαφορά των αποτελεσμάτων ολοκλήρωσης στα δεδομένα αυτά σημεία.

[41]Ο συμβολισμός $[f(x)]_a^b$ σημαίνει $f(b) - f(a)$.

[42]Αυτός είναι ο ορισμός της ροής ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{A}$, η οποία ορίζει ένα βαθμωτό μέγεθος. Στο ολοκλήρωμα δεν αναγράφονται κάποια όρια καθότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι στην πραγματικότητα διπλό, αφού η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα πάνω σε μια ολόκληρη επιφάνεια –εδώ μια κλειστή επιφάνεια.



Σχήμα 25: Μια πηγή έξω από την επιφάνεια που "βλέπει" την επιφάνεια υπό στερεά γωνία μικρότερη του 4π δεν συνεισφέρει στη ροή, αφού η ροή από τις δύο στοιχειώδεις επιφάνειες $d\vec{S}_1, d\vec{S}_2$ είναι 0.

στερεά γωνία (αυτήν που "βλέπει" προς το περίγραμμα της επιφάνειας) στο προηγούμενο ολοκλήρωμα, αλλά το"έσω" μέρος της επιφάνειας (αυτό που κοιτά προς την πηγή) θα έχει ακριβώς της αντίθετη συνεισφορά, αφού η στερεά γωνία θα είναι ακριβώς η ίδια με την προηγούμενη αλλά θα έχει αρνητικό πρόσημο λόγω των αμβλειών γωνιών που θα σχηματίζονται από τις αντίστοιχες επιφάνειες και το $\hat{r}$. Το συμπέρασμα, λοιπόν, είναι ότι για ένα τέτοιου τύπου πεδίο θα ισχύει η γενική πρόταση ότι

$$\Phi_{\text{ολ}} = 4\pi \sum_i a_i^{\text{περιεχόμενα}} \ ,$$

όπου στο άθροισμα θα πρέπει να συμπεριληφθούν μόνο οι πηγές που περιέχονται στην επιφάνεια. Η πρόταση αυτή αποτελεί το περιεχόμενο του *νόμου του Gauss* και έχει ενδιαφέρουσες υπολογιστικές συνέπειες στην περίπτωση του πεδίου Coulomb και της βαρύτητας, τα οποία είναι πεδία αντιστρόφου τετραγώνου.

Βασικά συμπεράσματα:

1. Τις επίπεδες γωνίες τις μετράμε σε ακτίνια (rad) μετρώντας το μήκος ενός τόξου πάνω σε κύκλο που έχει ως κέντρο την κορυφή της γωνίας και συγκρίνοντας (διαιρώντας) αυτό με την ακτίνα του κύκλου.

2. Οι σχέσεις μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων σε σφαίρικες είναι

$$\begin{aligned} z &= (\mathrm{KZ}) = R\cos\theta \ , \\ & \quad\ (\mathrm{K\Sigma'}) = R\sin\theta \ , \\ x &= (\mathrm{KX}) = R\sin\theta\cos\phi \ , \\ y &= (\mathrm{KY}) = R\sin\theta\sin\phi \ , \end{aligned} \tag{20}$$

ενώ οι αντίστροφες σχέσεις είναι

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ , \\ \theta &= \cos^{-1}(z/R) \ , \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) \ . \end{aligned} \tag{21}$$

3. Η επιφάνεια μιας σφαίρας ισούται με $S = 4\pi R^2$.

4. Η σφαιρική γωνία ορίζεται ως

$$\Omega = \frac{S_{\sigma\varphi}}{R^2}$$

όπου $S_{\sigma\varphi}$ είναι η σφαιρική επιφάνεια που αποκόπτει η στερεά γωνία διαιρεμένη με το τετράγωνο της ακτίνας R της αντίστοιχης σφαίρας (που έχει ως κέντρο την κορυφή της στερεάς γωνίας).

5. Όταν μια στοιχειώδης στερεά γωνία αποκόπτει μια στοιχειώδη αυθαίρετη επιφάνεια η σχέση αυτών είναι

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot\hat{R}}{R^2}$$

6. Με χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων μια στοιχειώδης στερεά γωνία μπορεί να γραφεί ως

$$d\Omega = \sin\theta \ d\theta \ d\phi$$

7. Ολοκληρώνοντας (με διπλή ολοκλήρωση) τη στοιχειώδη γωνία σε όλο το εύρος των γωνιών που μια στερεά γωνία ορίζει μπορούμε να υπολογίσουμε τη στερεά αυτή γωνία.

3 Πίνακες (ο κόσμος του matrix...)

3.1 Χτίζοντας τις στροφές

Στο εδάφιο αυτό θα παρασκευάσουμε σχέσεις που θα συσχετίζουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός διανύσματος στον δισδιάστατο χώρο σε δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων που είναι στραμεένα το ένα σε σχέση με ο άλλο κατά γωνία w. Έτσι αφενός μεν θα μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε στο κεφάλαιο 1 είναι πράγματι αναλλοίωτο και ανεξάρτητο του πως είναι στραμένο το σύστημα συντεταγμένων και αφετέρου θα μας δώσει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε ένα καινούργιο αντικείμενο που πολλαπλασιάζοντας καταλλήλως ένα διάνυσμα του μετασχηματίζει τις συντεταγμένες από ένα σύστημα αξόνων σε ένα άλλο στραμένο ως προς το πρώτο. Θα φτιάξουμε και θα μελετήσουμε τη δράση ενός πίνακα στροφής.

Έστω $\vec{r}$ κάποιο διάνυσμα θέσης και x, y οι συνιστώσες αυτού σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Αν το διάνυσμα σχηματίζει γωνία a με τον άξονα x, τότε θα είναι:

$$x = r\cos a \quad , \quad y = r\sin a \ .$$

Σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων x', y', στραμμένο ως προς το πρώτο κατά γωνία w, τέτοιο ώστε η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{r}$ με τον άξονα x' να είναι $a - w$, οι συντεταγμένες του $\vec{r}$ θα είναι

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(a-w) = r(\cos a\cos w + \sin a\sin w) = x\cos w + y\sin w \\ y' &= r\sin(a-w) = r(\sin a\cos w - \cos a\sin w) = y\cos w - x\sin w \end{aligned}$$ [43]

Ας γράψουμε τις παραπάνω εκφράσεις συνοπτικά ως ακολούθως

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ -\sin w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{22}$$

όπου με αυτή την οργανωμένη χωροθέτηση ποσοτήτων εννοούμε την ακόλουθη πράξη μεταξύ των δύο ποσοτήτων $(\ldots)$ (*πινάκων*) του δεξιού μέλους. Επιλέγουμε την πρώτη γραμμή του 1ου πίνακα που αποτελείται από τα δύο στοιχεία

$$\cos w \quad \sin w$$

και την 1η (και μοναδική στήλη) του 2ου πίνακα που αποτελείται από τα στοιχεία

$$x$$

[43] Οι τριγωνομετρικές εκφράσεις για τα αθροίσματα (και τις διαφορές) δύο γωνιών είναι

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a \quad , \quad \cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b \ .$$

στο κεφάλαιο των μιγαδικών θα βγάλουμε τις σχέσεις αυτές αβίαστα.

$$y$$

και εκτελούμε την πρόσθεση γινομένων

$$(\cos w)\ x + (\sin w)\ y\ .$$

Το αποτέλεσμα αυτό το γράφουμε ως το 1ο (και μοναδικό στοιχείο) της νεοδημιουργηθείσας στήλης, δηλαδή το x'. Όμοια το 2ο στοιχείο της νεοδημιουργηθείσας στήλης, δηλαδή το y' το υπολογίζουμε εκτελώντας το αντίστοιχο άθροισμα γινομένων των στοιχείων της 2ης γραμμής του 1ου πίνακα στο δεξί μέλος

$$-\sin w \quad \cos w$$

με τα στοιχεία της 1ης (και πάλι και μοναδικής) στήλης του 2ου πίνακα στο δεξί μέλος

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad ,$$

δηλαδή

$$(-\sin w)\ x + (\cos w)\ y\ .$$

αυτή η περίεργη πράξη που εκτελέσαμε μεταξύ δύο πινάκων θα την ορίσουμε ως πολλαπλασιασμό πινάκων. Κάθε φορά θα επιλέγουμε μια γραμμή από τον αριστερό πίνακα και μια στήλη από ο δεξιό πίνακα και θα κατασκευάζουμε όλα τα δυνατα γινόμενα στοιχείων της πρώτης με αυτά της δεύτερης, τα οποία στο τέλος θα τα προσθέτουμε. Έτσι θα φτιάχνουμε ένα στοιχείο του νέου πίνακα που θα προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των δύο πρώτων.

Μεγάλο μπέρδεμα ε; Οφείλουμε, όμως, να αναγνωρίσουμε ότι η σχέση (22) είναι σαφώς πιο τακτοποιημένη από την (22) έχοντας κρύψει τη συνθετότητα της (22) μέσα στο μηχανισμό πολλαπλασιασμού που ορίσαμε παραπάνω. Το κυριώτερο όμως είναι ότι ξεχωρίσαμε με τη νέα γραφή το αντικείμενο της στροφής που αφορά στα δύο συστήματα συντεταγμένων και καθόλου στο διάνυσμα $\vec{r}$, από το διάνυσμα $\vec{r}$, στη θέση του οποίου θα μπορούσαμε να βάλουμε οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα και να του αλλάξουμε τις συντεταγμένες.

3.2 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ας ακολουθήσουμε τη συνταγή αυτού του περίεργου πολλαπλασιασμού μεταξύ δύο πινάκων σε ένα παράδειγμα πινάκων πιο ευρύ από αυτό των στροφών διανυσμάτων. Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{R}_w = \begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ -\sin w & \cos w \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{R}_s = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

που έχουν ακριβώς τη δομή των πινάκων στροφής (ο ένας κατά γωνία w και ο άλλος κατά γωνία s).[44] Ο πολλαπλασιασμός αυτών των δύο πινάκων θα δώσει

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_s\mathbf{R}_w &= \begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ -\sin w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}^{45} \\
&= \begin{pmatrix} \cos w \cos s + \sin w(-\sin s) & \cos w \sin s + \sin w \cos s \\ (-\sin w)\cos s + \cos w(-\sin s) & (-\sin w)\sin s + \cos w \cos s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(w+s) & \sin(w+s) \\ -\sin(w+s) & \cos(w+s) \end{pmatrix} .^{46}
\end{aligned}$$

Για την κατασκευή του "μεγάλου" πίνακα της 2ης σειράς στην παραπάνω εξίσωση ακολουθήσαμε τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων. Για παράδειγμα, το στοιχείο του τελικού πίνακα που βρίσκεται στην 1η γραμμή και της 2ης στήλης, το $\cos w \sin s + \sin w \cos s$, κατασκευάστηκε πολλαπλασιάζοντας καθένα στοιχείο της 1ης γραμμής του 1ου πίνακα

$$\cos w \quad \sin w$$

με καθένα στοιχείο της 2ης στήλης του 2ου πίνακα

$$\begin{matrix} \sin s \\ \cos s \end{matrix}$$

και κατόπιν αθροίζοντας τα επί μέρους γινόμενα. Όμοια υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα που προκύπτει από το γινόμενο των δύο πινάκων.

Παρατηρούμε ότι ο τελικός πίνακας είναι ακριβώς ένας πίνακας στροφής που στρέφει τα διανύσματα κατά γωνία $w+s$. Με άλλα λόγια ο υπολογισμός του

$$(\mathbf{R}_s\mathbf{R}_w)\ \vec{r}$$

με τον πολλαπλασιασμό των δύο πινάκων στροφής να προηγείται και κατόπιν τον υπολογισμό του πολλαπλασιασμού με το διάνυσμα $\vec{r}$, καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με τον πολλαπλασιασμό πρώτα του $\mathbf{R}_w$ με το διάνυσμα $\vec{r}$

$$\mathbf{R}_w\ \vec{r}\ ,$$

ακολουθούμενο από τον πολλαπλασιασμό με τον πίνακα $\mathbf{R}_s$

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{R}_w\ \vec{r})$$

[44] Στο εξής θα συμολίζουμε τους πίνακες με παχιά γράμματα για να τους διαφοροποιούμε από τα διανύσματα και τις βαθμωτές ποσότητες. Στην παραγματικότητα και τα διανύσματα και οι βαθμωτές ποσότητες μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες $N \times 1$ ή $1 \times N$ τα μεν και 1×1 οι δε.

[45] Στον πολλαπλασιασμό των πινάκων δεν χρησιμοποιήσαμε κανένα σημάδι, όπως "$\cdot$" ή "$\times$", αφού τα σύμβολα αυτά τα έχουμε δεσμεύσει για να σημειώνουμε τα εσωτερικά και τα εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων. Η απουσία συμβόλου θα ερμηνεύεται λοιπόν ως πολλαπλασιασμός πινάκων, κατ' αντιστοιχία με τον συνήθη πολλαπλασιασμό αριθμών, π.χ. $2x$.

[46] Χρησιμοποιήσαμε, πάλι, τις τριγωνομετρικές ταυτότητες της υποσημείωσης 1.

αφού το πρώτο γινόμενο δημιουργεί ένα νέο διάνυσμα από τη στροφή του $\vec{r}$ κατά γωνία w, ενώ ο δεύτερο γινόμενο προκαλεί μια νέα στροφή αυτού του νέου διανύσματος κατά γωνία s· συνολικά το $\vec{r}$ στρέφεται κατά γωνία $w + s$. Τουλάχιστον για τους πίνακες στροφής και έναν πίνακα αναπαράστασης διανύσματος, λοιπόν, προέκυψε μέσω της πράξης του πολλαπλασιασμού που ορίσαμε παραπάνω η ακόλουθη προσεταιριστική (*associative*) ιδιότητα που αφορά στη σειρά των πράξεων

$$(\mathbf{R}_s \mathbf{R}_w)\,\vec{r} = \mathbf{R}_s(\mathbf{R}_w\,\vec{r})\ .$$

Θα δείξουμε αργότερα ότι αυτή είναι μια γενική ιδιότητα που ισχύει στον πολλαπλασιασμό πινάκων, όσοι και αν είναι αυτοί.

Προς το παρόν διαπιστώνουμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων, όπως ορίστηκε έχει ενδιαφέρον γιατί μια σειρά στροφών μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα γινόμενο πινάκων. Μάλιστα η σειρά των στροφών (ποια θα προηγείται και ποια θα έπεται) στη συγκεκριμένη περίπτωση των δισδιάστατων διανυσμάτων δεν έχει σημασία, αφού η στροφή κατά $w + s$ είναι ταυτόσημη με τη στροφή κατά $s + w$. Δεν θα πρέπει, όμως, να νομίζουμε ότι η μεταθετική (*commutative*) αυτή ιδιότητα ισχύει γενικά. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων *δεν είναι* εν γένει μεταθετικός. Θα το εξηγήσουμε αυτό καλύτερα αργότερα.

3.3 Πότε μπορούμε να εκτελέσουμε πολλαπλασιασμό πινάκων;

Ας θεωρήσουμε τους ακόλουθους δύο πίνακες:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\ .$$

Μπορούμε άραγε να τους πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους; Ας δοκιμάσουμε αν μπορούμε να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}\ .$$

Ο **A** έχει 1 γραμμή με 2 στοιχεία, ενώ ο **B** έχει μια στήλη με 2 στοιχεία. Επομένως η μοναδική γραμμή αυτή του **A** θα πολλαπλασιαστεί, στοιχείο-στοιχείο, με τη μοναδική στήλη του **B** για να δώσει έναν μοναδικό αριθμό, τον

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11\ .$$

Ο αριθμός αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση πίνακα με ένα στοιχείο (πίνακας με 1 γραμμή και 1 στήλη). Η πράξη ήταν εφικτή επειδή αυτή η 1 γραμμή και η 1 στήλη είχαν ακριβώς το ίδιο πλήθος στοιχείων, παρά το ότι οι δύο πίνακες ήταν διαφορετικοί.

Ας δοκιμάσουμε να εκτελέσσουμε και τον πολλαπλασιασμό

$$\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,.$$

τώρα ο πρώτος έχει 2 γραμμές (με 1 στοιχείο η κάθε μία) και ο δεύτερο 2 στήλες (με 1 στοιχείο η κάθε μία), οπότε ο πολλαπλασιασμός κάθε μίας γραμμής του πρώτου με κάθε μία στήλη του δεύτερου θα οδηγήσει σε έναν πίνακα με 2 γραμμές και 2 στήλες· τον

$$\mathbf{B}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\,.$$

Ο υπολογισμός ήταν και πάλι εφικτός γιατί το πλήθος των στοιχείων σε κάθε γραμμή του πρώτου, συνέπιπτε με το πλήθος των στοιχείων σε κάθε γραμμή του δεύτερου. Απλώς, ο πίνακας που προέκυψε τώρα από τον πολλαπλασιασμό δεν είναι πλεόν αριθμός αλλά ένας πίνακας με 2 γραμμές (όσες ο πρώτος πίνακας, ο **B**) και 2 στήλες (όσες ο δεύτερος πίνακας, ο **A**). Το γεγονός πάντως ότι το γινόμενο **AB** είναι τελειώς διαφορετικό από το **BA** αποδεικνύει τη μη μεταθετικότητα των πινάκων.

Και στις δύο περιπτώσεις πολλαπλασιασμού η πράξη ήταν εφικτή. Ο λόγος ήταν ότι οι στήλες του πρώτου (του εξ αριστερών) ήταν όσες και οι γραμμές του δεύτερου (του εκ δεξιών). Αυτή είναι και η απαιτούμενη συνθήκη για να μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός. Επόμένως αν ένας πίνακας είναι διαστάσεων $K \times M$ (όπου ο πρώτος αριθμός δηλώνει πλήθος γραμμών και ο δεύτερος πλήθος στηλών) και ένας δεύτερος είναι διαστάσεων $N \times P$, τότε μπορούμε να τους πολλαπλασιάσουμε

$$(K \times M)\,(N \times P)$$

μόνον εφόσον είναι $M = N$. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας που θα προκύψει θα είναι διαστάσεων $K \times P$, με γραμμές όσες οι γραμμές του πρώτου και στήλες όσες οι στήλες του δεύτερου αφού κάθε μία γραμμή (τα στοιχεία της) του πρώτου θα πολλαπλασιαστεί με κάθε στήλη (τα στοιχεία της) του δεύτερου. Αν πολλαπλασιάζαμε τους πίνακες με αντίθετη σειρά θα έπρεπε, κατ᾽αντιστοιχία, να είναι $P = K$ για να είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός και ο παραγόμενος πίνακας θα ήταν $N \times M$. Η περίπτωση εφικτού πολλαπλασιασμού και με τις δύο διατάξεις ($M = N$ και $P = K$) είναι η περίπτωση που είδαμε στο αμέσως προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα. Προφανώς δύο τετραγωνικοί πίνακες (*square matrices*) ιδιας διάστασης μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους με οποιαδήποτε διάταξη. Ο πίνακας που θα προκύψει θα είναι και πάλι τετραγωνικός ιδιας διάστασης, αλλά διαφορετικός εν γένει στις δύο δυνατές περιπτώσεις.

3.4 Δείκτες και αθροιστική σύμβαση

Τώρα που μάθαμε πως να εκτελούμε αυτόν ιδιότυπο πολλαπλασιασμό μεταξύ πινάκων, θα δοκιμάσουμε να εκλεπτύνουμε τη γλώσσα μας ώστε να μπορούμε να γράφουμε εκφράσεις για τον πολλαπλασιασμό, αντί να κουνάμε τα χέρια μας, να χρωματίζουμε γραμμές και στήλες και να λέμε “πάρε αυτή τη γραμμή του πρώτου πίνακα και πολλαπλασίασε ένα-ένα τα στοιχεία αυτής με τα αντίστοιχα στοιχεία εκείνης της στήλης του δεύτερου πίνακα...”. Αντί όλων αυτών θα γράφουμε απλώς

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} \Longleftrightarrow C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \ .$$

Το τίμημα για την τεράστια αυτή οικονομία είναι ότι πρέπει να κατανοήσουμε καλά και να εξοικειωθούμε με τη νέα αυτή λακωνική γλώσσα. Η παραπάνω σχέση λέει το ακόλουθο. Αν **C** ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των **A**, **B** (με αυτή τη σειρά) τότε το στοιχείο του **C** που βρίσκεται στην i-γραμμή (1ος δείκτης) και στην j-στήλη (2ος δείκτης) αυτού προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της i-γραμμής (1ος δείκτης) του **A**: $A_{i1}, A_{i2}, \ldots$ με τα στοιχεία της j-στήλης (2ος δείκτης) του **B**: $B_{1j}, B_{2j}, \ldots$. Ο πολλαπλασιασμός αυτός μάλιστα θα πραγματοποιείται μεταξύ των ζευγαριών των αντίστοιχων στοιχείων: $A_{i1}B_{1j}, A_{i2}B_{2j}, \ldots$ και στο τέλος αυτά τα γινόμενα θα πρέπει να προστεθούν. Ολόκληρη η παραπάνω περιγραφείσα διαδικασία θα πρέπει να γίνει για κάθε τιμή των δεικτών i και j ώστε να υπολογιστούν όλα τα στοιχεία του **C**.

Οι απόκρυφοι κωδικοί αυτής της διαδικασίας είναι οι ακόλουθοι: (α) Οι δείκτες σε κάθε πίνακα έχουν συγκεκριμένη διάταξη: ο πρώτος δηλώνει γραμμή και ο δεύτερος στήλη, (β) όταν κάποιοι δείκτες εμφανίζονται μία φορά στο ένα μέλος της εξίσωσης και δεν ζευγαρώνουν με ίδιας ονομασίας δείκτες, αυτό σημαίνει ότι οι δείκτες αυτοί μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή $1, 2, \ldots$ επιτρέπεται από τις δοσμένες διαστάσεις των των εμπλεκομένων πινάκων, (γ) δείκτες οι οποίοι εμφανίζονται σε ζεύγος (εις διπλούν) στο ένα από τα μέλη μιας εξίσωσης, θα υπονοείται ότι το ζεύγος αυτό των δεικτών θα πρέπει να λάβει όλες τις τιμές που του επιτρέπεται να πάρει και να ακολουθήσει άθροιση των γινομένων που θα προκύψουν.[47] Η άθροιση αυτή που δεν σημειώνεται στην έκφραση, αλλά υπονοείται, είναι γνωστή ως αθροιστική σύμβαση του Einstein (βλ. Κεφ. 1) και μας γλυτώνει από περιττά σύμβολα που θα κάνουν τις εκφράσεις μας να φαίνονται πιο πολύπλοκες.[48] (δ) Αν υπάρχουν στην έκφραση παραπάνω από ένα ζεύγος κοινών δεικτών τότε θα πρέπει να γίνει άθροιση σε όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει ο κάθε δείκτης. Για παράδειγμα η έκφραση

$$A_{1k}B_{jk}C_{j2}$$

[47]Υποθέτουμε πως τα αντικείμενα για τα οποία γίνεται η συζήτηση έχουν τη μορφή γινομένων. Αν για παράδειγμα παρουσιαστεί η έκφραση

$$A_{ik} + B_{ij}C_{jk}$$

Δεν θα γίνει καμία άθροιση σε όλες τις τιμές του “κοινού” δείκτη k, γιατί αυτός είναι κοινός σε ένα άθροισμα και όχι σε ένα γινόμενο. Θα γίνει άθροιση σε όλες τις τιμές του κοινού δείκτη j γιατί αυτός είναι κοινός σε ένα γινόμενο.

[48]Η σύμβαση αυτή χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Einstein στην εργασία του, του 1916, Foundation of General Relativity. Βλ. σελ. 158 του Doc. 30 της *μεταφρασμένης* στα αγγλικά έκδοσης του έργου του Einstein στην προσπάθεια του να απαλλάξει τις εκφράσεις των εξισώσεών του από άχρηστα σύμβολα.

θα σημαίνει

$$\begin{array}{ccccc} A_{11}B_{j1}C_{j2} & + & A_{12}B_{j2}C_{j2} & + & \ldots = \\ A_{11}(B_{11}C_{12}+B_{21}C_{22}+\ldots) & + & A_{12}(B_{12}C_{12}+B_{22}C_{22}+\ldots) & + & \ldots\ . \end{array}$$

Το πλήθος των όρων που θα προκύψουν από τη διπλή αυτή άθροιση θα είναι το γινόμενο του πλήθους των τιμών που μπορεί να πάρει ο κοινός δείκτης k επί το πλήθος των όρων που μπορεί να πάρει ο κοινός δείκτης j. (ε) Μπορούμε την ονομασία που χρησιμοποιείται σε ένα ζεύγος κοινών δεικτών να την εναλλάξουμε με ότι γράμμα (ή άλλο σύμβολο) θέλουμε, αρκεί να το κάνουμε αυτό και στους δύο ίδιους δείκτες. Όμως επειδή η αθροιστική σύμβαση αναφέρεται σε ζευγάρια και όχι σε κουαρτέτα ή σεξτέτα κοκ. θα πρέπει να αποφεύγεται η χρήση κάποιου δείκτη παραπάνω από 2 φορές. Μπορούμε το οποιοδήποτε νέο ζευγάρι εμφανιστεί (και για το οποίο υποννοείται η αθροιστική σύμβαση) να το ονομάσουμε με οποιοδήποτε *καινούργιο* γράμμα/σύμβολο. (στ) Αν μια εξίσωση περιέχει αντικείμενα με δείκτες, θα πρέπει οι ελέυθεροι (οι μη ζευγαρωμένοι) δείκτες του ενός σκέλους να ταιριάζουν ακριβώς με τους ελέυθερους δείκτες του άλλου σκέλους. Το ίδιο ισχύει και στα επί μέρους κομμάτια του εκάστοτε σκέλους αν αυτά προστίθενται (ή αφαιρούνται). Το πλήθος των ζευγών κοινών δεικτών, όμως, στα δύο μέλη της εξίσωσης (ή στα προστιθέμενα σε κάθε σκέλος κομμάτια) μπορεί να είναι πολύ διαφορετικά σε πλήθος. Για παράδειγμα η σχέση αυτή

$$A_{ij} = B_{ik}C_{kj} + D_jE_iF_{rm}G_{mr}$$

είναι απολύτως ισορροπημένη (από πλευράς ελεύθερων δεικτών και ζευγών δεικτών), αλλά η

$$A_{ij} = B_jC_{ki}$$

δεν είναι ισορροπημένη αφού στο δεξί σκέλος περισσεύει ένας μη ζευγαρωμένος δείκτης, ο k. (ζ) Και η σημαντικότερη και πιο δυσκολοχώνευτη παρατήρηση. Ενώ δεν έχουμε δικαίωμα να γράφουμε

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}\ ,$$

αφού όπως θα δείξουμε αργότερα το γινόμενο δύο πινάκων συνήθως είναι διαφορετικό αν αλλάξουμε τη διάταξη των πινάκων στον πολλαπλασιασμό, η ακόλουθη έκφραση με δείκτες

$$A_{ij}B_{jk} = B_{jk}A_{ij} \tag{23}$$

(24)

είναι σωστή, αφού αυτό που γράφουμε στη σχέση αυτή είναι άθροισμα γινομένου αριθμών, που προφανώς δεν αλλάζει αν αλλάξουμε τη σειρά των αριθμών· π.χ.

$$1\cdot 2 + 3\cdot 4 = 2\cdot 1 + 4\cdot 3\ .$$

Προσέξτε ότι στην παραπάνω έκφραση (24) δεν πειράξαμε καθόλου τους δείκτες του εκάστοτε πίνακα, απλώς αντιμεταθέσαμε τα στοιχεία των δύο πινάκων σε κάθε γινόμενο. (η) Στη διεθνή βιβλιογραφία οι κοινοί δείκτες ονομάζονται *dummy indices*, που έχει αποδοθεί στα ελληνικά ως *βωβοί δείκτες*. Θα μπορούσε να τους αποκαλεί κανείς δείκτες μπαλαντέρ, ή ψευτοδείκτες υποδηλώνοντας ότι δεν σημαίνουν κάποια συγκεκριμένη θέση, αλλά όλες τις δυνατές θέσεις.

3.4.1 Προσεταιριστική Ιδιότητα του Γινομένου Πινάκων

Προκειμένου να εξασκηθούμε στη γραφή δεικτών και ταυτόχρονα να δείξουμε κάτι χρήσιμο, ας υπολογίσουμε το γινόμενο τριών πινάκων $\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C})$:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C})]_{ab} &= A_{ac}(\mathbf{B}\,\mathbf{C})_{cb} \\
&\text{γράψαμε με δείκτες το γινόμενο του πίνακα } \mathbf{A} \text{ με τον πίνακα } \mathbf{B}\,\mathbf{C} \\
&= A_{ac}(B_{cd}C_{db}) \\
&\text{γράψαμε με δείκτες το στοιχείο } cb \text{ του πίνακα } \mathbf{B}\,\mathbf{C} \\
&= A_{ac}B_{cd}C_{db} \\
&\text{στα γινόμενα αριθμών μπορούμε να εκτελέσουμε τους πολ/σμούς με ότι σειρά θέλουμε} \\
&= (A_{ac}B_{cd})C_{db} \\
&= (\mathbf{A}\,\mathbf{B})_{ad}C_{db} \\
&\text{εκτελώντας την άθροιση στο } c \text{ κατασκευάζουμε το } ad \text{ στοιχείο του } \mathbf{A}\,\mathbf{B} \\
&= [(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\mathbf{C}]_{ab} \ .
\end{aligned}
$$

Το τελικό αποτέλεσμα εγγυάται ότι το ab στοιχείο του $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ είναι το ίδιο με το ab στοιχείο του $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ επομένως οι παρενθέσεις δεν έχουν κάποιο ιδιαίτερο νόημα και θα μπορούσαν να παραλειφθούν, γράφοντας απλά $\mathbf{ABC}$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε για άλλη μια φορά ότι την ενδιάμεση έκφραση που γράψαμε $A_{ac}B_{cd}C_{db}$ θα μπορούσαμε να την είχαμε γράψει με όποια σειρά θέλαμε, π.χ. $B_{cd}A_{ac}C_{db}$ χωρίς να διαταράξουμε τη σειρά των δεικτών του κάθε πίνακα ή $B_{ij}A_{ai}C_{jb}$ αλλάζοντας τις ονομασίες των κοινών μόνο δεικτών.

3.4.2 Η μη μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού των πινάκων

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πειραματιζόμενοι ότι $\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$. Έχουμε δει ένα τέτοιο παράδειγμα όταν πολλαπλασιάσαμε μεταξύ τους δύο πίνακες 1×2 και 2×1. Το αποτέλεσμα σε εκείνη την περίπτωση ήταν διαφορετικό γιατί οι διαστάσεις των τελικών πινάκων δεν ταίριαζαν. Στην πραγματικότητα, όμως, η μη μεταθετκότητα των πινάκων είναι κάτι πιο βαθύ που δεν έχει να κάνει με τις διαστάσεις τους. Θεωρήστε τους πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; .$$

Πολλαπλασιάζοντάς τους βρίσκουμε

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \; .$$

Εμφανώς είναι διαφορετικοί πίνακες, παρά το ότι οι διαστάσεις τους είναι ίδιες και όλοι οι πίνακες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν τετραγωνκοί 2×2. Ο βαθύτερος λόγος αυτής της μη μεταθετικότητας των πινάκων οφείλεται στην πλούσια δράση αυτών, όπως θα δούμε σε μεταγενέστερο εδάφιο. Μπορείτε όμως να νοιώσετε λίγο αυτή τη γοητεία του πλούτου των δράσεων αν πάρετε ένα αντικείμενο (π.χ. ένα βιβλίο) από το γραφείο σας και δοκιμάσετε να το στρέψετε πρώτα γύρω από μια κάθετο στο εξώφυλλο του βιβλίου που διέρχεται από την κάτω αριστερή γωνία του κατά $\pi/2$ και στη συνέχεια γύρω από τον άξονα της ράχης του και πάλι κατά $\pi/2$ ακολουθώντας τον κανόνα του δεξιού σας χεριού. Μετά δοκιμάστε να εκτελέσετε τις παραπάνω στροφές με ανάποδη σειρά και συγκρίνετε τις τελικές θέσεις του βιβλίου σας!

Εμείς θα αρκεστούμε εδώ να δούμε λίγο πιο πρακτικά το θέμα της μεταθετικότητας χρησιμοποιώντας την αγαπημένη πλέον αθροιστική σύμβαση.

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})_{ij} = A_{ik}B_{kj} \quad , \quad (\mathbf{B}\,\mathbf{A})_{ij} = B_{ik}A_{kj} = A_{kj}B_{ik} \; .$$

Στο πρώτο γινόμενο για να κατασκευάσουμε το ij στοιχείο του γινομένου θα χρησιμοποιήσουμε την i-γραμμή του **A** και την j-στήλη του **B**, ενώ στο δεύτερο γινόμενο θα χρησιμοποιήσουμε την j-στήλη του **A** και την i-γραμμή του **B**. Προφανώς αυτές θα είναι διαφορετικές (άλλα στοιχεία περιλαμβάνει η i-γραμμή του **A** και άλλα η j-στήλη του **A**, ενώ το αντίστοιχο ισχύει και για την j-στήλη και την i-γραμμή του **B**), οπότε το αποτέλεσμα θα μας εξέπληττε αν έβγαινε ίδιο.

3.5 Χρήση πινάκων για την επίλυση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος – Αντίστροφος πίνακα

Ας δούμε άλλη μια εφαρμογή της χρήσης πινάκων. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα αλγεβρικών, αλλά γραμμικών εξισώσεων. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το πολύ απλό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \; , \\ 3x + 4y &= -1 \; . \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια πινάκων ως ακολούθως

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{Z} \; , \tag{25}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Θα ήταν ευχής έργον, αν αντιμετωπίζαμε την (25) ως μια εξίσωση αριθμών και γράφαμε απλά $\mathbf{X} = \mathbf{Z}/\mathbf{A}$. Είδαμε όμως στην περίπτωση των διανυσμάτων ότι διαίρεση με διανύσματα δεν είναι δυνατόν να επιτύχουμε. Πόσο μάλλον με πίνακες, που μοιάζουν να αποτελούν διεύρυνση των διανυσμάτων, αφού περιλαμβάνουν τα διανύσματα ως ειδικές κατηγορίες πινάκων (μονόστηλων). Ας μην εγκαταλείψουμε την προσπάθειά μας αβίαστα. Ο **A** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και θέλουμε να φτιάξουμε τον αντίστροφό του, δηλαδή έναν πίνακα που όταν πολλαπλασιάζει τον **A** να δίνει μονάδα... Μονάδα; Μα με ότι και να πολλαπλασιάσουμε τον **A** δεν μπορεί να πάρουμε ως αποτέλεσμα αριθμό!

Μήπως να ξανασκεφτόμασταν πρώτα τι είναι, στο χώρο των πινάκων, το αντίστοιχο της μονάδας; Είναι εύκολο να δούμε ότι ο τετραγωνικός $N \times N$ πίνακας

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

με μονάδες μόνο στα διαγώνια στοιχεία του και μηδενικά παντού αλλού, έχει την ιδιότητα να αφήνει τους πίνακες $N \times N$ απείραχτους, όταν τους πολλαπλασιάζει είτε εκ δεξιών είτε εξ αριστερών. Για παράδειγμα είναι εύκολο να διαπιστώσετε εκτελώντας τις πράξεις ότι

$$\mathbf{I}_2 \ \mathbf{A}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{26}$$

και

$$\mathbf{A}_{2\times2} \ \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ . \tag{27}$$

Μάλιστα ο μοναδιαίος αυτός πίνακας έχει την ιδιότητα να λειτουργεί ως μονάδα και για μη τετραγωνικούς πίνακες

$$\mathbf{A}_{N\times2} \ \mathbf{I}_2 = \mathbf{A}_{N\times2} \ ,$$

αλλά δρώντας από την άλλη πλευρά του $\mathbf{A}_{N\times2}$ χρειάζεται ο $\mathbf{I}_N$ για να πάρουμε πάλι τον αρχικό πίνακα:

$$\mathbf{I}_N \ \mathbf{A}_{N\times2} = \mathbf{A}_{N\times2} \ .$$ [49]

Εξαιτίας αυτής της ιδιαιτερότητας, θα ασχοληθούμε στα επόμενα εδάφια μόνο με συμμετρικούς πίνακες, χωρίς κάθε φορά να το επισημαίνουμε.

[49]Προφανώς η παραπάνω δράση του μοναδιαίου πίνακα ισχύει σε οποιεσδήποτε διαστάσεις, δηλαδή $\mathbf{I}_N \ \mathbf{A}_{N\times M} = \mathbf{A}_{N\times M}$.

Επιστρέφοντας στο αρχικό μας πρόβλημα, αυτό της επίλυσης του γραμμικού συστήματος (25), θέλουμε να βρούμε έναν πίνακα $\mathbf{A}^{-1}$ τέτοιον ώστε $\mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{A} = \mathbf{I}$[50] Με τη βοήθεια του $\mathbf{A}^{-1}$ μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε εξ αριστερών τη σχέση (25) και να λάβουμε

$$\mathbf{X} = \mathbf{I}\ \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{A}\ \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{Z}$$

δηλαδή να βρούμε τις άγνωστες ποσότητες x, y που εμπεριέχονται στον (μονόστηλο) πίνακα $\mathbf{X}$, εκτελώντας πράξεις μεταξύ του κατασκευασμένου πίνακα $\mathbf{A}^{-1}$ και του γνωστού (μόνοστηλου) πίνακα $\mathbf{Z}$.

Μένει λοιπόν να κατασκευάσουμε (αν κατασκευάζεται) τον αντίστροφο ενός 2×2 πίνακα $\mathbf{A}$. Θα το κάνουμε στη γενική του μορφή. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και έστω

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} .$$

Από την απάιτηση $\mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} Aa + Bc &= 1 , \\ Ab + Bd &= 0 , \\ Ca + Dc &= 0 , \\ Cb + Dd &= 1 , \end{aligned}$$ [51]

με αγνώστους τα A, B, C, D. Αφαιρώντας τις πρώτες δύο εξισώσεις, αφού πρώτα πολλαπλασιαστούν η πρώτη με d και η δεύτερη με c, βρίσκουμε

$$A = \frac{d}{ad - bc} .$$

Όμοια αφαιρώντας τις πρώτες δύο εξισώσεις, αφού πρώτα πολλαπλασιαστούν η πρώτη με b και η δεύτερη με a, βρίσκουμε

$$B = \frac{-b}{ad - bc} .$$

[50] Εσκεμμένα δεν σημειώσαμε τη διάσταση του μοναδιαίου πίνακα, ώστε να απαντήσουμε στο γενικότερο πρόβλημα επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος.

[51] Μοιάζει κάπως ειρωνικό ότι στην προσπάθειά μας να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους, φτάσαμε να προσπάθούμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους. Όμως δεν θέλαμε να λύσουμε τοαρχικό γραμμικό σύστημα με μια από τις απλές μεθόδους που γνωρίζουμε. Θέλαμε να βρούμε έναν αλγοριθμικό τρόπο να λύνουμε τέτοια προβλήματα, γι᾽αυτό και καταλήξαμε σε κάτι πιο δύσκολο από τον αρχικό στόχο.

Εκτελώντας αντίστοιχους πολλαπλασιασμούς και αφαιρέσεις μεταξύ των δύο τελευταίων εξισώσεων βρίσκουμε

$$C = \frac{-c}{ad-bc} \ , \ D = \frac{a}{ad-bc} \ .$$

Ο αντίστροφος του αρχικού μας πίνακα λοιπόν θα είναι

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$ [52]

Προτού προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματός μας ας προσέξουμε ότι η ποσότητα $ad - bc$, που είναι γνωστή ως η ορίζουσα του αρχικού πίνακα,[53] εμφανίζεται στον παρονομαστή· επομένως όταν αυτή είναι μηδενική δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αντίστροφο του αρχικού πίνακα, ο πίνακας δεν έχει αντίστροφο. Αυτό είναι κάτι ανάλογο με τον αριθμό 0 που δεν έχει αντίστροφο. Στους πίνακες η μη αντιστρεψιμότητα δεν περιορίζεται στους μηδενικούς· μια ολόκληρη κλάση πινάκων δεν έχουν αντίστροφο. Θα ζήσουμε με αυτή την απώλεια και θα δούμε αργότερα πως μπορούμε να “κλέψουμε” λίγο.

Το αρχικό σύστημα (25), λοιπόν, έχει ως λύση (και μάλιστα σε κομψή μορφή) την

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

που μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι πράγματι αποτελεί λύση του συστήματος:

$$1\cdot(-3) + 2\cdot(2) = 1 \ , \ 3\cdot(-3) + 4\cdot(2) = -1 \ .$$

Αν στο αρχικό σύστημα το $2,1$-στοιχείο του πίνακα δεν ήταν 3, αλλά 2, θα εμφανιζόταν η προβληματική κατάσταση όπου η ορίζουσα του παρονομαστή θα μηδενιζόταν. Θα είχαμε να λύσουμε τότε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \ , \\ 2x + 4y &= -1 \ . \end{aligned}$$

Η μη δυνατότητα λύσης του συστήματος θα οφειλόταν στο γεγονός ότι η έκφραση στο αριστερό μέλος της δεύτερης εξίσωσης, δεν είναι άλλη από τη διπλάσια της αντίστοιχης έκφρασης στην πρώτη εξίσωση, ενώ το δεξιό μέλος δεν είναι διπλάσιο του 1. Ε,ιναι σημαντικό, όμως, να παρατηρήσουμε ότι αν και είμαστε συνηθισμένοι από τις ασκήσεις φυσικής να μας δίνονται συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές για τα διάφορα μεγέθη, η

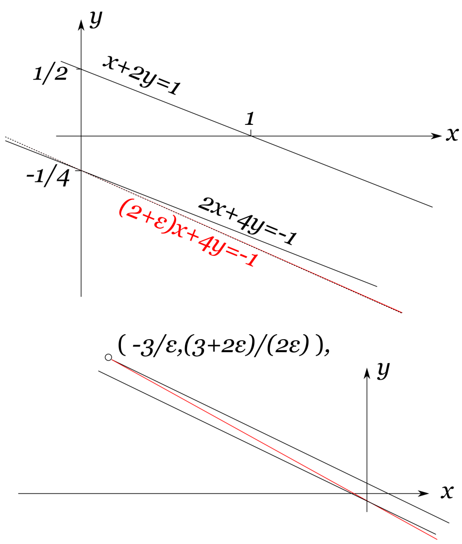
[52] Ο αριθμός έξω από τον πίνακα $1/(ad-bc)$ που πολλαπλασιάζει τον πίνακα, δρα με τον πλέον αφελή τρόπο· απλώς πολλαπλασιάζει όλα τα σοιχεία του πίνακα.

[53] Περισσότερα για την ορίζουσα και τη φυσική της σημασία θα δούμε αργότερα.

πραγματικότητα δεν είναι ποτέ ακριβώς τέτοια. Συνήθως η γνώση μας περιορίζεται από κάποιες αβεβαιότητες, οπότε καλό είναι να αντιμετωπίζουμε τα αριθμητικά στοιχεία με μια δόση δημιουργικής ασάφειας. Για παράδειγμα αυτό το $2,1$-στοιχείο του αρχικού πίνακα $\mathbf{A}$, αν του επιτρέψουμε να διαφοροποιηθεί ελαφρά από την τιμή 2, να είναι για παράδειγμα $2+\epsilon$, ;όπου ϵ είναι ένας πολύ μικρός αριθμός, αυτομάτως το σύστημα θα επιδεχόταν λύση, την

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot(2+\epsilon)}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -(2+\epsilon) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2\epsilon}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -(2+\epsilon) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2\epsilon}\begin{pmatrix} 6 \\ -3-\epsilon \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3/\epsilon \\ (3+\epsilon)/(2\epsilon) \end{pmatrix} . \qquad (28)
\end{aligned}$$

Προφανώς η παραπάνω λύση αποτυγχάνει για $\epsilon = 0$, αλλά έχει νόημα εφόσον $\epsilon \neq 0$.



Σχήμα 26: Μια μικρή διαφοροποίηση ενός συντελεστή σε δύο μη τεμνόμενες παράλληλες ευθείες καθιστά τις ευθείες αυτές τεμνόμενες (βλ. λεπτομέρεια).

Μόλις το στοιχείο $2,1$ διαφοροποιηθεί από την τιμή 2, οι δύο εξισώσεις παύουν να είναι αντιφατικές (ασύμβατες) και οδηγούν σε κάποια μοναδική λύση του συστήματος. Γεωμετρικά, μπορεί κανείς να πει ότι το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$x + 2y = 1 \ , \ 2x + 4y = -1$$

περιγράφει δύο παράλληλες ευθείες εκ των οποίων η μία "στραβώνει" ελαφρώς μόλις η δεύτερη εξίσωση αλλάξει σε $(2+\epsilon)x+4y = 1$ (βλ. Σχήμα). Τότε αυτομάτως οι δύο ευθείες θα πάψουν να είναι παράλληλες και θα τμηθούν, αν και κάπου μακριά (εξαιτίας του παράγοντα $1/\epsilon$) από την αρχή των αξόνων).

Σε επίπεδο πινάκων η όλη συζήτηση ανάγεται στο ότι κάποιοι πίνακες δεν έχουν αντίστροφο (όταν η ορίζουσα αυτών μηδενίζεται) αλλά με μια μικρή τροποποίηση κάποιου στοιχείου αυτού, ο πίνακας καθίσταται αντιστρέψιμος.

3.6 Ανάστροφος πίνακας

Στο προηγούμενο εδάφιο κατασκευάσαμε, για τις ανάγκες επίλυσης ενός συστήματος, τον αντίστροφο ενός πίνακα. Υπάρχει κάποιος άλλος πίνακας που θα είχε νόημα να κατασκευάσουμε, ξεκινώντας από έναν δοθέντα πίνακα; Ας θυμηθούμε τη σύμβαση που έχουμε ακολουθήσει να χαρακτηρίζουμε ως στοιχείο A_{ij} ενός πίνακα **A** το στοιχείο που βρίσκεται στην i-γραμμή και στην j-στήλη. Αν κατά λάθος μπερδεύαμε αυτή τη σύμβαση και γράφαμε A_{ij} θεωρώντας ότι αυτό είναι το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στην i-στήλη και στην j-γραμμή; Προφανώς θα φτιάχναμε έναν άλλο πίνακα, ή για την ακρίβεια μια επαναδιάταξη των συνιστωσών του αρχικού πίνακα, π.χ. αντί για τον

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

θα κατασκευάζαμε (με τη λανθασμένη θεώρηση) τον

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

αφού θα βάζαμε, για παράδειγμα, στην 1-στήλη και τη 2-γραμμή εκείνο το στοιχείο που σύμφωνα με την αρχική μας σύμβαση θα έπρεπε να τοποθετηθεί στην 1-γραμμή και τη 2-στήλη, δηλαδή το 2. Ο νέος πίνακας $\mathbf{A}'$ που φτιάξαμε, έχει στην κύρια διαγώνιο, όλα τα στοιχεία του **A** ακριβώς στην ίδια θέση, αλλά όλα τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου στη συμμετρική ως προς τη διαγώνιο θέση. Η πρόταση αυτή ισχύει όχι μόνο για τους 2×2 πίνακες, αλλά για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες. Ο ανακατασκευασμένος πίνακας, κατοπτρικός του **A** ως προς την κύρια διαγώνιο, ονομάζεται για ευνόητους λόγους *ανάστροφος* του **A** και συμβολίζεται $\mathbf{A}^\top$. Ο ανάστροφος ενός πίνακα έχει ως k-στήλη την k-γραμμή του **A** και αντίστροφα, ως k-γραμμή την k-στήλη του **A**.

Έχει ο ανάστροφος ενός πίνακα κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες; Μάλλον όχι, η κατασκευή του είναι περισσότερο χρηστική. Για παράδειγμα ένας μονόστηλος πίνακας $N \times 1$ μπορεί να μετατραπεί σε πίνακα γραμμή $1 \times N$ μέσω της αναστροφής. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας στήλη με στοιχεία τις συνιστώσες ενός διανύσματος

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

θα έχει ως ανάστροφο τον

$$\mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

και το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος με τον εαυτό του (το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος) θα μπορεί να υπολογιστεί από το γινόμενο των πινάκων $\mathbf{v}^\top\mathbf{v}$.

Επίσης προσθέτοντας σε έναν πίνακα τον ανάστροφό του[54] και πολλαπλασιάζοντας το απότέλεσμα με $1/2$ λαμβάνουμε έναν πίνακα

$$\mathbf{S}^{(\mathbf{A})} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)$$

πιο "ζυγισμένο" από τον αρχικό πίνακα $\mathbf{A}$, όπου τα μεν στοιχεία της διαγωνίου είναι ακριβώς αυτά του αρχικού πίνακα, ενώ τα εκτός της διαγωνίου είναι συμμετρικά τοποθετημένα, δηλαδή το $S_{ij}^{(\mathbf{A})}$ στοιχείο είναι ίδιο με το $S_{ji}^{(\mathbf{A})}$ και ίσο με το ημιάθροισμα των A_{ij} A_{ji}. Ο συμμετρικός αυτός πίνακας αυτός είναι ο $\mathbf{A}$ συμμετροποιημένος και έχει την ιδιότητα $(\mathbf{S}^{(\mathbf{A})})^\top = \mathbf{S}^{(\mathbf{A})}$, και το πιο ενδιαφέρον είναι ότι το βαθμωτό μέγεθος

$$\mathbf{v}^\top\mathbf{A}\mathbf{v}$$

είναι ακριβώς ίδιο με το

$$\mathbf{v}^\top\mathbf{S}^{(\mathbf{A})}\mathbf{v}$$

για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{v}$ (κατάλληλης διάστασης βέβαια) αναπαριστώμενο ως μονόστηλος πίνακας. Για να καταλάβετε αυτή την ενδιαφέρουσα ιδιότητα αντικατάστασης του τυχαίου τετραγωνικού πίνακα με τον αντίστοιχο συμμετροποιημένο του πίνακα ας δούμε σε ένα παράδειγμα 2×2 γιατί αυτό ισχύει.[55] Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

και το βαθμωτό μέγεθος (πίνακας 1×1)

$$\mathbf{v}^\top\,\mathbf{A}\,\mathbf{v} \;=\; \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

[54] Προφανώς αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν ο πίνακας είναι τετραγωνικός. Ειδάλλως οι πίνακες, ο αρχικός και ο ανάστροφός του, δεν θα έχουν τις ίδιες διαστάσεις ώστε να μπορεί να κατασκευαστεί το άθροισμα αυτών.

[55] Η γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις είναι άμμεση.

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} \\
&= v_1(v_1 + 2v_2) + v_2(3v_1 + 4v_2) \\
&= v_1^2 + 5v_1v_2 + 4v_2^2 \ .
\end{aligned}
$$

Προσέξτε ότι η μεταθετικότητα του γινομένου αριθμών $v_1v_2 = v_2v_1$ οδήγησε στο "μάζεμα" των όρων $5v_1v_2$. Αν φτιάχναμε την ίδια βαθμωτή πόσότητα αντρικαθιστώντας τον **A** με τον συμμετροποιημένο του

$$\mathbf{S}^{(\mathbf{A})} = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

θα λαμβάναμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα! Τέτοιες διγραμμικές μορφές εμφανίζονται συχνά στη Φυσική, όπως για παράδειγμα η έκφραση για την κινητική ενέργεια, οπότε είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι η αντικατάσταση πινάκων με τα συμμετροποιημένα έκδοχα τους (που είναι απλούστερα) δεν αλλοιώνει τα αποτελέσματα, και, όπως θα μάθετε μεταγενέστερα στις σπουδές σας, μπορεί να τα καταστήσει πιο εύχρηστα.

Αν και ο συμμετροποιημένος ενός πίνακα μπορεί να επιφέρει τα ίδια αποτελέσματα με τον αρχικό πίνακα, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο αρχικός πίνακας διαφέρει από τον συμμετροποιημένο του πίνακα και δρα γενικώς διαφορετικά. Μπορούμε λοιπόν να αποκαταστήσουμε τον αρχικό πίνακα γράφοντας τον τυχαίο τετραγωνικό πίνακα ως

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top) + \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^\top) = \mathbf{S}^{(\mathbf{B})} + \mathbf{A}^{(\mathbf{B})} \ ,$$

όπου ορίσαμε ως $\mathbf{A}^{(\mathbf{B})}$ τον

$$\frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^\top)$$

που είναι ο αντισυμμετροποιημένος (κατ' αναλογία με τον συμμετροποιημένο) πίνακας **B**. Προφανώς ο αντισυμμετροποιημένος ενός πίνακα έχει στη διαγώνιο μηδενικά

$$A_{ii}^{(\mathbf{B})} = \frac{1}{2}(B_{ii} - B_{ii}) = 0 \quad \textit{(χωρίς τη χρήση της αθροιστικής σύμβασης)}$$

και στη μη διαγώνιο αριθμούς που είναι αντίθετοι των κατοπτρικών τους ως προς τη διαγώνιο, π.χ.

$$\mathbf{A}^{(\mathbf{B})} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

για τον πίνακα

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

που είδαμε παραπάνω.[56] Με την κατασκευή αυτή συμμετροποιημένου/αντισυμμετροποιημένου μπορούμε να "σπάσουμε" τον οποιονδήποτε πίνακα σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος, τονίζοντας τα συμμετρικά και τα αντισυμμετρικά χαρακτηριστικά

[56]Πιο πάνω τον είχαμε ονομάσει **A**, αλλά τώρα του αλλάξαμε όνομα για να μην τον μπερδέψουμε με τον αντισυμμετροποιημένο του $\mathbf{A}^{(\mathbf{B})}$.

αυτού. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο γιατί μπορούμε να οργανώσουμε καλύτερα τις πληροφορίες που έχουμε για έναν πίνακα.

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό ας δούμε και άλλη μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα που ισχύει για τους αναστρόφους πινάκων που προκύπτουν από γινόμενο πινάκων. Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \ .$$

Τι σχέση έχει ο ανάστροφος του γινομένου με τους αρχικούς πίνακες ή τους αναστρόφους αυτών; Ας δούμε ποιο είναι το (i, j) στοιχείο του $\mathbf{C}$:

$$C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \ .$$

Αντίστοιχα του αναστρόφου του $\mathbf{C}$ θα είναι

$$(\mathbf{C}^\top)_{ji} = C_{ij} = A_{ik}B_{kj} = (A^\top)_{ki}(B^\top)_{jk} = (B^\top)_{jk}(A^\top)_{ki} = (\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top)_{ji} \ .$$

Δηλαδή

$$\mathbf{C}^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top \ .$$

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται στην

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_N)^\top = \mathbf{A}_N^\top\mathbf{A}_{N-1}^\top\cdots\mathbf{A}_2^\top\mathbf{A}_1^\top \ ,$$

δηλαδή ο ανάστροφος του γινομένου είναι το γινόμενο των αναστρόφων με την ανάστροφη σειρά. Μάλιστα δεν έχει σημασία αν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί ή όχι· αρκεί μόνο να ορίζεται το γινόμενό τους. Προφανώς αν ορίζεται θα ορίζεται και το γινόμενο των αναστρόφων με την ανάστροφη σειρά.

Προσοχή, όμως. Η παραπάνω πρόταση *δεν λέει* ότι

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)^\top = \mathbf{A}_3^\top\mathbf{A}_1^\top\mathbf{A}_2^\top \ .$$

Δεν επιτρέπεται να πειράξουμε τη σειρά των πινάκων στο γινόμενο, παρά μόνο να τη γυρίσουμε ανάποδα.

3.7 Ίχνος πίνακα

Οι πίνακες που έχουμε χρησιμοποιήσει ως τώρα είναι μυστήρια αντικείμενα, αποτελούμενα από κάμποσους αριθμούς διατεταγμένους με αρκετά μυστηριακό τρόπο έτσι ώστε να μπορούμε να κάνουμε πολλαπλασιασμούς με αυτούς, όχι και τόσο τετριμμένους. Υπάρχει, άραγε, κάτι που κρύβεται πίσω από αυτούς τους αριθμούς και τη διάταξή τους που σχετίζεται με κάποια αναλλοιότητα, ανάλογη με τα εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων που δεν αλλάζουν, ακόμη και αν αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε τα διανύσματα; Η απάντηση είναι καταφατική· η αναλλοίωτη αυτή ποσότητα είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα. Αναλλοίωτη σε τι, άραγε;

Ας φανταστούμε δύο διανύσματα το $\vec{a} = (a_1, a_2)$ και το $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Ας τα αναπαραστήσουμε με πίνακες:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{a}^\top = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{b}^\top = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \;,$$

και ας εκτελέσουμε τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς πινάκων:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \vec{a} \cdot \vec{b} \;. \tag{29}$$

Ομοίως

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^\top = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

και

$$\mathbf{b}\mathbf{a}^\top = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Παρατηρούμε ότι αν και το αποτέλεσμα των δύο τύπων πολλαπλασιασμού, (29) και (30,31), είναι διαφορετικό (τη μια φορά αριθμός και την άλλη πίνακας 2×2), υπάρχει ένα στοιχείο κοινό και στα 3 αποτελέσματα. Το *ίχνος* των πινάκων, δηλαδή το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα, που στην περίπτωση (29) είναι ο ίδιος ο αριθμός (αφού ο αντίστοιχος πίνακας είναι 1×1) είναι πάντα ο ίδιος συνδυαμός συνιστωσών των δύο διανυσμάτων, που είναι η αναλλοίωτη, ως προς το σύστημα συντεταγμένων, ποσότητα, γνωστή ως εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.

Ας ελέγξουμε κατά πόσο η παρατήρηση αυτή ισχύει γενικά σε N-διάστατα διανύσματα. Έστω το διάνυσμα (με αθροιστική σύμβαση) $\vec{a} = a_i \hat{e}_i = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ και $\vec{b} = b_i \hat{e}_i = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$. Κατασκευάζοντας τους πίνακες

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{a} = a_i b_i$$

και $\mathbf{a}\mathbf{b}^\top$ είναι ένας $N \times N$ πίνακας $\mathbf{C}$ με στοιχεία $C_{ij} = a_i b_j$.[57] Τα διαγώνια στοιχεία αυτού του πίνακα είναι $C_{11} = a_1 b_1, C_{22} = a_2 b_2, ldots, C_{NN} = a_N b_N$, οπότε το άθροισμα αυτών θα είναι

$$C_{ii} = a_i b_i$$

[57]Ο πίνακας $\mathbf{b}\mathbf{a}^\top$ δεν είναι άλλος από τον ανάστροφο του $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^\top$.

ακριβώς το ίδιο με το $\mathbf{a}^\top \mathbf{b}$. Όπως και να πολλαπλασιάσουμε, λοιπόν, τις αναπαραστάσεις των διανυσμάτων (εφόσον ο πολλαπλασιασμός είναι εφικτός) το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων είναι ίδιο και όντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων δεν αλλάζει, αν αλλάξουμε το σύστημα αναφοράς.

Συνεπώς το ίχνος ενός πίνακα που κατασκευάζεται, όπως παραπάνω, από δύο διανύσματα είναι αναλλοίωτο ως προς τη βάση που χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε τα διανύσματα. Είναι όμως κάθε τετραγωνικός πίνακας φιαγμένος από δύο διανύσματα; Ας πάρουμε ως παράδειγμα τον 2×2 πίνακα που χρησιμοποιήσαμε πολλάκις.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Είναι ο $\mathbf{A}$ κατασκευάσιμος από δύο διανύσματα

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

μέσω του γινομένου $\mathbf{X}\,\mathbf{Y}^\top$, που είναι ο 2×2 πίνακας

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} ;$$

Για να απαντήσουμε, θα πρέπει να λύσουμε το μη γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= 1 \, , & (32) \\ x_1 y_2 &= 2 \, , & (33) \\ x_2 y_1 &= 3 \, , & (34) \\ x_2 y_2 &= 4 \, . & (35) \end{aligned}$$

Λύνοντας την (32) ως προς x_1 και την (35) ως προς x_2 και αντικαθιστώντας τις λύσεις στις (34) και (33), αντίστοιχα θα έχουμε

$$\frac{x_2}{x_1} = 3 \, , \ \frac{4x_1}{x_2} = 2 \, . \tag{36}$$

Οι παραπάνω δύο σχέσεις είναι προφανώς ασύμβατες και δεν υπάρχει λύση, ούτε για τα x_1, x_2 ούτε για τα y_1, y_2. Συνεπώς δεν είναι δυνατόν κάθε πίνακας να μπορεί να κατασκευαστεί από 2 διανύσματα. Επομένως χάνεται και η αναλλοιότητα του ίχνους μαζί με την αδυναμία ανασύνθεσης του πίνακα από δύο διανύσματα; Σαφώς, όχι. Ας "πειράξουμε" τον πίνακα χωρίς να αλλοιώσουμε το ίχνος του. Συγκεκριμένα, ας αλλάξουμε το $(1,2)$ στοιχείο του πίνακα από 2 σε 4/3. Αυτομάτως η δεύτερη από τις δύο σχέσεις της (36) καθίσταται συμβατή με την πρώτη και τότε μπορούμε να βρούμε διανύσματα

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ που να είναι σε θέση να συνθέτουν τον "πειραγμένο" πίνακα. Για παράδειγμα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\,\mathbf{Y}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \end{pmatrix} .$$

Το μη πειραγμένο ίχνος του πειραγμένου πίνακα είναι το εσωτερικό γινόμενο, όπως δείξαμε των διανυσμάτων $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, το οποίο όπως τονίσαμε παραπάνω δεν αλλάζει αν αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αναπαριστούμε τα διανύσματα. Το ότι δεν αλλάζει το ίχνος, προφανώς δεν σημαίνει ότι δεν αλλάζουν τα στοιχεία της διαγωνίου. Απλώς μέσα στο άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου έχει ενσωματωθεί το αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα που αλλάξαμε, τα οποία δεν βρίσκονταν στη διαγώνιο, δεν μεταφέρουν έτσι κι αλλιώς καμία πληροφορία αναλλοιότητας· γι' αυτό και ήταν αθώα η αλλαγή τους ώστε να επιτευχθεί ο συνδυασμός δανυσμάτων που φτιάχνουν τον πίνακα.

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον παραπάνω συλλογισμό σε τετραγωνικούς πίνακες μεγαλύτερης διάστασης; Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να βρούμε κατάλληλες λύσεις για τις $2N$ άγνωστες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N$ στο πολύ πλουσιότερο μη γραμμικό σύστημα [2] εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= a_{11} \, , \\ x_1 y_2 &= a_{12} \, , \\ &\cdots \\ x_1 y_N &= a_{1N} \, , \\ x_2 y_1 &= a_{21} \, , \\ x_2 y_2 &= a_{22} \, , \\ &\cdots \\ x_N y_N &= a_{NN} \, , \end{aligned}$$

Με κατάλληλη αναδιαμόρφωση των μη διαγώνιων στοιχείων (όχι κατ' ανάγκη όλων) που ούτως ή άλλως δεν σχετίζονται με το ίχνος του πίνακα μπορούμε βρούμε διανύσματα $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ που θα συνθέτουν τον παραλλαγμένο, αλλά ίδιου ίχνους πίνακα. Για παράδειγμα αν θέσουμε

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 1$$

τότε οι εξισώσεις που αφορούν στα διαγώνια στοιχεία θα οδηγήσουν στο διάνυσμα

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{NN} \end{pmatrix} ,$$

οπότε αυτομάτως αλλάζοντας καταλλήλως τους σταθερούς όρους (τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα) σε όλες τις άλλες εξισώσεις ώστε να ταιριάζουν με τα ήδη διαμορφωθέντα γινόμενα, π.χ.

$$a_{12} \to a_{22}\ ,\ a_{13} \to a_{33}, \cdots, a_{mn} \to a_{nn}, \cdots, a_{N,N-1} \to a_{N-1,N-1}$$

θα έχουμε ένα πίνακα που έχει τα ίδια μεν διαγώνια στοιχεία με τον αρχικό, τον

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{NN} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{NN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

και θα μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{X}\ \mathbf{Y}^\top$ και μάλιστα με άπειρους δυνατούς συνδυασμούς διανυσμάτων.[58] Υπό αυτή λοιπόν την έννοια, το ίχνος του πίνακα είναι αναλλοίωτο σε στροφές των δυνατών διανυσμάτων που θα μπορούσαν να χτίσουν τουλάχιστον το εν λόγω ίχνος του πίνακα.

3.8 Ιδιοανύσματα και ιδιοτιμές

Έχουμε δει μέχρι στιγμής τους πίνακες να δρουν (πολλαπλασιαστικά) σε διανύσματα και να παράγουν νέα διανύσματα (στροφές διανυσμάτων, λύση στο διάνυσμα των αγνώστων ενός συστήματος μέσω της δράσης του αντιστρόφου πίνακα των συντελεστών στο διάνυσμα των σταθερών όρων). Ας δούμε μερικές άλλες τέτοιες δυνατές δράσεις.

Ο μοναδιαίος πίνακας

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δρώντας σε οποιοδήποτε διάνυσμα το αφήνει ίδιο, γι' αυτό και ονομάζεται *ταυτοτικός*.

Ο πίνακας

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δρώντας σε οποιοδήποτε διάνυσμα $(x, y)^\top$ του αντιστρέφει τη x-συνιστώσα του δημιουργώντας το κατοπτρικό του ως προς τον άξονα y:

$$\mathbf{K}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}\ .$$

[58]Μην ξεχνάτε ότι η επιλογή του $\mathbf{X} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ ήταν αυθαίρετη. Αν είχαμε κάνει κάποια άλλη επιλογή το $\mathbf{Y}$ θα είχε λάβει διαφορετική μορφή, ο πίνακας θα είχε διαμορφωθεί διαφορετικά κρατώντας πάντα τη διαγώνιο και το ίχνος του ακριβώς τα ίδια.

Ο πίνακας αυτός είναι ένας πίνακας κατοπτρισμού.

Ο πίνακας

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

δρώντας σε διανύσματα τα μεγεθύνει κατά τον παράγοντα λ.

Ο πίνακας

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δρώντας σε διανύσματα τα προβάλλει στον άξονα y. Πρόκειται για έναν προβολικό πίνακα.

Ο πίνακας

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

δρώντας σε διανύσματα τα μεγεθύνει στην x-κατεύθυνση κατά τον παράγοντα λ, αλλά τα συμπιέζει στην y-κατεύθυνση κατά τον παράγοντα λ. Ο πίνακας αυτός παραμορφώνει τις σχετικές θέσεις δύο σωμάτων με τον ίδιο τρόπο που δρουν οι παλίρροιες λόγω βαρύτητας.

Τέλος, τον πίνακα στροφών **R**, που στρίβει τα διανύσματα κατά κάποια επιθυμητή γωνία χωρίς να τους αλλάζει το μέτρο, τον είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

Αφού, λοιπόν, ένας πίνακας δρώντας σε διανύσματα τα μεταμορφώνει σε άλλα, εν γένει, διανύσματα μπορούμε να αναρωτηθούμε αν μπορεί ένας πίνακας να δρα σε διανύσματα χωρίς να τα στρίβει, χωρίς δηλαδή να τους αλλάζει κατεύθυνση. Ίσως σκεφθείτε ότι ένα τέτοιο ερώτημα δεν έχει και πολύ αξία. Άλλοι πίνακες, όπως ο **I** και ο **M** έχουν αυτή την ικανότητα και άλλοι όχι. Κι όμως όλοι μπορεί να τα καταφέρουν αλλά με συγκεκριμένου τύπου διανύσματα.

Ας ξεκινήσουμε για άλλη μια φορά με τον οικείο μας πλέον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Υπάρχει περίπτωση ο πίνακας αυτός δρώντας σε κάποιο διάνυσμα, $\mathbf{\Psi}$, να το αφήνει στην ίδια κατεύθυνση (να μην το στρίβει), χωρίς να μας ενδιαφέρει αν το μεγαλώνει ή το μικραίνει σε μήκος. Ας λύσουμε αυτό το περίεργο ερώτημα: Θέλουμε

$$\mathbf{A\Psi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

όπου ο λ είναι αριθμός που δηλώνει την άγνοιά μας περί μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης του αρχικού διανύσματος. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί σε πιο εκλεπτυσμένη (αλλά και χρήσιμη) μορφή:

$$\mathbf{A}\ \mathbf{\Psi} = \lambda \mathbf{I}\ \mathbf{\Psi} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \qquad (37)$$

όπου $\mathbf{0} = (0,0)^\top$ το μηδενικό διάνυσμα. Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων με προφανή τετριμμένη λύση την $(x = 0, y = 0)$. Δεν ήταν όμως αυτός ο στόχος μας. Το ξέραμε ότι αν οποιοσδήποτε πίνακας δράσει σε ένα μηδενικό διάνυσμα το αφήνει απείραχτο. Εμείς θέλαμε να το πετύχουμε αυτό σε κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα. Ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων δεν μπορεί, όμως, να έχει παραπάνω από μία λύσεις , εκτός αν οι εξισώσεις είναι κατ' ουσίαν λιγότερες απ' όσες φαίνονται ότι είναι. Αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όπως λέμε. Τι σημαίνει αυτό; Πάρτε ως παράδειγμα τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \ , \\ -10x - 15y &= 0 \ . \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι δύο διαφορετικές εξισώσεις· πρόκειται για την ίδια εξίσωση γραμμένη δύο φορές και τη δεύτερη φορά, όλοι οι συντελεστές της και ο σταθερός όρος είναι πολλαπλασιασμένοι με το (-5). Προφανώς οι λύσεις του συστήματος είναι άπειρες: είναι όλα τα πολλαπλάσια της λύσης $(x = 3, y = -2)$. Ας δούμε και ένα παράδειγμα με περισσότερες εξισώσεις και αγνώστους.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \ , \\ 3x - 2y + z &= 0 \ , \\ 8x - y + 7z &= 0 \ . \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή διαπιστώνουμε, με μια λίγο προσεκτική εξέταση, ότι η 3η εξίσωση προκύπτει από την άθροιση της 1ης με τη 2η πολλαπλασιασμένης επί 2. Πάλι υπάρχει απειρία λύσεων του συστήματος αυτού αφού αρκεί να ικανοποιήσουμε με τη λύση μας τις δύο πρώτες και αυτόματα θα ικανοποιηθεί και η 3η. Έτσι λύνοντας τις πρώτες δύο ως προς z, βρίσκουμε

$$z = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y = -3x + 2y$$

δηλαδή

$$\frac{13}{5}x = \frac{13}{5}y \Rightarrow x = y$$

οπότε επιστρέφοντας στη σχέση για το z βρίσκουμε $z = -x$. Η λύση λοιπόν του συστήματος (και της 3ης εξίσωσης την οποία δικαιολογημένα απαξιώσαμε) είναι όλα τα πολλαπλάσια του $(x = 1, y = 1, z = -1)$.

Αν θέλαμε μια γεωμετρική αναπαράσταση της *γραμμικής εξάρτησης* (το αντίθετο της γραμμικής ανεξαρτησίας) που εμφανίστηκε στα δύο παραπάνω παραδείγματα (το ένα στις 2 διαστάσεις και το άλλο στις 3 διαστάσεις) θα λέγαμε ότι το πρώτο σύστημα των δύο εξισώσεων παριστάνει δύο φορές την ίδια ευθεία, ενώ το δεύτερο δύο διαφορετικά επίπεδα που τέμνονται στην ευθεία που περιγράφεται από σημεία με συντεταγμένες $x(1, 1, -1)$. Το επίπεδο της τρίτης εξίσωσης δεν είναι ένα άλλο άσχετο επίπεδο, αλλά ένα επίπεδο που διέρχεται από την τομή των δύο πρώτων, δηλαδή την ευθεία $x(1,1,-1)$. Το συμπέρασμα είναι ότι η γραμμική εξάρτηση συνίσταται από έναν κατάλληλο συντονισμό των συντελεστών σε μια τουλάχιστον από τις εξισώσεις του συστήματος ώστε οποιαδήποτε λύση των υπολοίπων εξισώσεων να λύνει και την τελευταία. Η τελευταία δεν είναι ανεξάρτητη από τις άλλες και η “επιφάνεια” που περιγράφει είναι δεσμευμένη από την τομή των υπολοίπων “επιφανειών”.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην αρχική μας εξίσωση (37). Για να έχει αυτή και άλλες λύσεις, εκτός της τετριμμένης, θα πρέπει ο πίνακας $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ να περιγράφει ένα γραμμικά εξαρτημένο σύστημα, δηλαδή οι συντελεστές του συστήματος

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x+2y &= 0\\ 3x+(4-\lambda)y &= 0\end{aligned}\tag{38}$$

να βρίσκονται σε σχέση αναλογίας. Δηλαδή θα πρέπει

$$\frac{1-\lambda}{3}=\frac{2}{4-\lambda}$$

με άλλα λόγια θα πρέπει

$$(1-\lambda)(4-\lambda)-6=0\ .$$

Η σχέση αυτή δεν είναι άλλη από την $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$. Η ορίζουσα ενέσκυψε στο πρόβλημα αυτό ακριβώς γιατί ο μηδενισμός της ορίζουσας είναι ο δείκτης που συνεπάγεται τη γραμμική εξάρτηση των εξισώσεων του αλγεβρικού συστήματος, όπως είδαμε και στην περίπτωση της χρήσης πινάκων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων. Και στη θέση του λ, τι τιμή πρέπει να βάλουμε; Μάλλον λάθος ερώτημα. Η τιμή του λ θα προσδιοριστεί από την απαίτηση να μηδενίζεται η ορίζουσα. Το πολυώνυμο ως προς λ που θα προκύψει θα είναι δευτέρου βαθμού (αφού ο αρχικός πίνακας είναι 2×2) και οι δύο τιμές που θα προκύψουν θα μας σώσουν τη μεγέθυνση (ή σμίκρυνση) που θα προκύψει στις μοναδικές δύο διευθύνσεις που ο πίνακας θα αφήσει απείραχτες, δρώντας σε διανύσματα με τέτοια διεύθυνση. Ας εκτελέσουμε τους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= 0\Rightarrow\\ (1-\lambda)(4-\lambda)-6 &= 0\Rightarrow\\ \lambda^2-5\lambda-2 &= 0\Rightarrow\\ \lambda_{1,2} &= \frac{5\pm\sqrt{33}}{2}\ .\end{aligned}\tag{39}$$

Τα δε διανύσματα που θα μεταμορφωθούν μετά τη δράση του πίνακα $\mathbf{A}$ σε λ_1 ή λ_2 φορές το αρχικό διάνυσμα θα είναι τα $\mathbf{X}_{1,2}$ που λύνουν τις δύο παραπάνω εξισώσεις (38). Δύο εξισώσεις; Όχι, όχι, το σύστημα αυτό αποτελείται από μία μόνο εξίσωση. Η δεύτερη είναι επανάληψη της πρώτης. Που το ξέρουμε; Το ξέρουμε γιατί η ορίζουσα του συστήματος είναι 0. Το απαιτήσαμε να είναι 0, ώστε να έχει το σύστημα και άλλη λύση εκτός της μηδενικής, κι έτσι πήραμε και τις δύο δυνατές τιμές για το λ. Ποια είναι, λοιπόν, αυτά τα ιδιαίτερα διανύσματα; Αυτά θα προκύψουν αν λύσουμε τη μια εξίσωση. Έτσι

$$\mathbf{X}_1 = \left(\begin{array}{c} x \\ \frac{\lambda_1 - 1}{2} x \end{array} \right) = x \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{array} \right) \text{ και } \mathbf{X}_2 = x \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} \end{array} \right) .$$

Όσο για το x δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε. Όπως αναφέραμε παραπάνω την ιδιαίτερη κατεύθυνση που θα μείνει αναλλοίωτη από τη δράση του πίνακα μπορούμε να καθορίσουμε, και όχι το ακριβές διάνυσμα. Ο λόγος είναι η γραμμικότητα με την οποία δρούν οι πίνακες: το διπλάσιο ενός διανύσματος θα αλλάξει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που άλλαξε το αρχικό. Εξάλλου ο μηδενισμός της ορίζουσας του πίνακα που προέκυψε θα οδηγούσε οπωσδήποτε σε μια απειρία λύσεων, πρόκειται για την απειρία που λαμβάνει κανείς αλλάζοντας την τιμή του x στα παραπάνω διανύσματα. Επιβεβαιώστε ότι τα συγκεκριμένα διανύσματα, αν πολλαπλασιαστούν με τον πίνακα **A** πράγματι οδηγούν σε πολλαπλάσια κατά λ_1 ή λ_2, αντίστοιχα, των αρχικών διανυσμάτων.

Συνοψίζοντας, κάθε πίνακας διάστασης $N \times N$ συσχετίζεται με N διευθύνσεις οι οποίες δεν στρίβουν κάτω από τη δράση του πίνακα. Οι διευθύνσεις αυτές λέγονται *ιδιοανύσματα* του πίνακα. Πρόκειται για διανύσματα συγκεκριμένης διεύθυνσης, αλλά όχι με συγκεκριμένο μήκος.[59] Το μέτρο της μεγέθυνσης/σμίκρυνσης του κάθε ιδιοανύσματος λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του εκάστοτε ιδιοανύσματος και βρίσκεται από την επίλυση του *χαρακτηριστικού πολυωνύμου*: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Να τονίσουμε ότι δεν μπορούμε να απαιτήσουμε τα διανύσματα στις διευθύνσεις που δεν στρίβουν να μεγαλώνουν ή να μικραίνουν κατά το δοκούν. Ο εκάστοτε πίνακας χαρακτηρίζεται από τα ιδιοανύσματά του και τις ιδιοτιμές αυτών. Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν από την επίλυση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου μας λένε ακριβώς πόσο μπορούν να μεγαλώσουν ή να μικρύνουν τα ιδιοανύσματα.

Ίσως να έχετε ήδη αναρωτηθεί τι θα συνέβαινε αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ήταν τέτοιο ώστε να μην επιδέχεται πραγματική λύση. Θα λέγαμε τότε ότι ο πίνακας δεν έχει ιδιοανύσματα και ιδιοτιμές; Η απάντηση είναι όχι. Ευτυχώς, όπως θα δείξουμε στο τελευταίο κεφάλαιο, έχουμε μάθει να χειριζόμαστε και αριθμούς που βρίσκονται πέραν του πεδίου των πραγματικών. Στο καινούργιο αυτό πεδίο των μιγαδικών αριθμών, το πολυώνυμό μας θα έχει πάντα λύση (βασικό θεώρημα της άλγεβρας) οπότε τα ιδιοανύσματα και οι ιδιοτιμές σε αυτή την περίπτωση θα έχουν πιο ιδιαίτερη μορφή. Αυτές τις περιπτώσεις, όμως, θα τις αφήσουμε να τις εξετάσουμε αφότου συζητήσουμε και χωνέψουμε καλύτερα την πραγματικότητα των φανταστικών και των μιγαδικών αριθμών.

[59]Θα μπορούσε κάποιος να κατασκευάσει τα ιδιοανύσματα με μήκος ίσο με 1, ώστε να μπορεί να τα χειριστεί ως διανύσματα βάσης για την κατασκευή οποιουδήποτε άλλου διανύσματος. Στην κανονικοποίηση αυτή όμως πιθανώς να χρειάζεται να σκεφθούμε τον τρόπο που θα μετρήσουμε το μήκος τους. Στο επόμενο εδάφιο θα δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα, όπου το μήκος των διανυσμάτων ορίζεται πιο φυσικά αν δεν επιλέξουμε να γράψουμε $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$, αλλά χρησιμοποιήσουμε μια εναλλακτική φόρμουλα.

Άλλη μια περίπτωση που αξίζει να σημειώσουμε είναι η περίπτωση να λάβουμε πολλαπλότητα σε μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Για παράδειγμα, αν ο πίνακάς μας ήταν ο

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9/8 & 4 \end{pmatrix}$$

θα οδηγούμασταν στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 - 5\lambda + (25/4) = 0 \Rightarrow (\lambda - 5/2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 5/2 \ .$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα είναι το $\mathbf{X} = x(1, 3/4)^\top$. Στην περίπτωση αυτή το ιδιοάνυσμα είναι μοναδικό, αλλά αυτό δεν σηματοδοτεί κάτι ξεχωριστό. Στην πραγματικότητα, αλλάζοντας τις τιμές των στοιχείων του πίνακα αλλάζουμε συνεχώς τα ιδιοανύσματα και τις ιδιοτιμές τους. Για κάποιο συνδυασμό τιμών του πίνακα τα ιδιοανύσματα ενδέχεται να συμπέσουν, οπότε και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές θα συμπέσουν.

Από δυναμικής σκοπιάς, στην περίπτωση πινάκων 2×2, μια ελαφριά απόκλιση του αρχικού διανύσματος από το ιδιοάνυσμα με τη μικρότερη ιδιοτιμή θα έχει ως αποτέλεσμα, μετά τη δράση του πίνακα να εκτρέψει το διάνυσμα μακρύτερα από την κατεύθυνση του ιδιοανύσματος σε σύγκριση με το αρχικό διάνυσμα. Αντίστοιχα, αν ξεκινήσουμε από κατεύθυνση κοντά στο ιδιοάνυσμα με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή, η τάση θα είναι να στραφεί έτσι ώστε να πλησιάσει περισσότερο το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα. Για να δούμε το παραπάνω φαινόμενο στην πράξη ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα ιδιοανύσματα και οι ιδιοτιμές αυτού του πίνακα θα είναι

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{με ιδιοτιμή} \ \ \lambda_1 = 2$$

και

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{με ιδιοτιμή} \ \ \lambda_2 = 1 \ .$$

Αν επιλέξουμε το αρχικό διάνυσμα να είναι πλησίον του $\mathbf{X}_0$, δηλαδή το

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1+\epsilon \\ 1 \end{pmatrix}$$

τότε η δράση του πίνακα στο διάνυσμα αυτό θα οδηγήσει στο

$$\mathbf{G}\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2+\epsilon \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1+\epsilon/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

που προφανώς είναι πιο κοντά στη διεύθυνση του $\mathbf{X}_1$ απ' ότι το $\mathbf{X}_0$. Αντίστοιχα αν επιλέξουμε το αρχικό διάνυσμα κοντά στο $\mathbf{X}_2$, π.χ. το

$$\mathbf{X}_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

ο πίνακας $\mathbf{G}$ θα το αλλάξει σε

$$\mathbf{G}\mathbf{X}_0' = \begin{pmatrix} 1+\epsilon \\ 2\epsilon \end{pmatrix} .$$

Το τελευταίο αυτό διάνυσμα είναι στραμμένο κατά μεγαλύτερη γωνία ως προς το $\mathbf{X}_2$ απ' ότι το $\mathbf{X}_0'$· η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{X}_0'$ σε σχέση με το ιδιοάνυσμα $\mathbf{X}_2$ που έχει την κατεύθυνση του άξονα x είναι

$$\delta\phi_0' = \tan^{-1}\epsilon$$

ενώ του $\mathbf{G}\mathbf{X}_0'$

$$\Delta\phi_0' = \tan^{-1}\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}$$

και προφανώς για μικρά ϵ ($0 < \epsilon < 1$) είναι $\Delta\phi_0' > \delta\phi_0'$. Με άλλα λόγια το ιδιοάνυσμα με τη μεγάλη ιδιοτιμή λειτουργεί σαν ελκυστής των διανυσμάτων, ενώ το ιδιοάνυσμα με τη μικρή ιδιοτιμή λειτουργεί ως απωθητής. Έτσι αν ο πίνακας τύχει να έχει ένα μόνο ιδιοάνυσμα, αυτό θα μπορούσαμε να το φανταστούμε αλλά και να το διαμορφώσουμε αναλόγως πειράζοντας κάποιο στοιχείο του, σαν να έχει δύο εξαιρετικά γειτονικά ιδιοανύσματα με πολύ παραπλήσιες ιδιοτιμές. Όταν βρισκόμαστε από τη μια πλευρά αυτού του ζεύγους παραπλήσιων ιδιοανυσμάτων το ιδιοάνυσμα με τη μεγάλη ιδιοτιμή θα λειτουργήσει ελκτικά και όταν βρισκόμαστε από την άλλη πλευρά, το άλλο ιδιοάνυσμα θα λειτουργήσει απωστικά. Όταν σβήσει η διαφορά των δύο ιδιοανυσμάτων, η μια πλευρά του μοναδικού ιδιοανύσματος θα οδηγεί σε στροφή των διανυσμάτων μακριά από το ιδιοάνυσμα και η άλλη σε στροφή προς το ιδιοάνυσμα. Αυτό θα σημαίνει ότι όλα τα διανύσματα (εκτός από τη διεύθυνση του ιδιοανύσματος) θα στρίβουν δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα (ανάλογα με τον πίνακα) ωθόντας τα από τη μια κατεύθυνση του ιδιοανύσματος προς την άλλη. Αντιθέτως, οι πίνακες 2×2 με δύο διαφορετικά ιδιοανύσματα θα χωρίζουν το χώρο σε 4 περιοχές (ανάμεσα στο $\mathbf{X}_1$ και το $\mathbf{X}_2$, ανάμεσα στο $\mathbf{X}_2$ και το $-\mathbf{X}_1$, κ.λ.π.) όπου περνώντας από περιοχή σε περιοχή θα αλλάζει η τάση στροφής των διανυσμάτων από δεξιόστροφη σε αριστερόστροφη και τούμπαλιν.[60]

Αν πρόκειται για πίνακες μεγαλύτερης διάστασης από 2×2, η στροφή των διανυσμάτων υπό την επίδραση του εν λόγω πίνακα είναι πιο πολύπλοκη καθώς η διεύθυνση του διανύσματος κινείται σε έναν μεγαλύτερης διάστασης χώρο. Στην καλύτερη περίπτωση στις 3 διαστάσεις (για πίνακα 3×3) μπορούμε να οπτικοποιήσουμε την κίνηση

[60]Όταν η ιδιοτιμή ενός ιδιοανύσματος είναι αρνητική, αυτό σημαίνει ότι το ιδιοάνυσμα αυτό αλλάζει κατεύθυνση μετά τη δράση του πίνακα. Για να μην μπερδέψουμε τη συζήτηση εμείς παρακολουθούμε πως αλλάζει η διεύθυνση του διανύσματος και όχι η κατεύθυνσή του. Οπότε στη συζήτηση των διαδοχικών στροφών ενός διανύσματος υπονοούμε τις στροφές της διεύθυνσης.

της ευθείας παρακολουθώντας το μοναδιαίο αντίστοχο διάνυσμα πως αλλάζει καθώς μετακινείται με διακριτά βήματα πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Δεν είναι δυνατή όμως μια τέτοια οπτικοποίηση σε ακόμη μεγαλύτερη διάσταση. Τα αποτελέσματα που είδαμε στις 2 διαστάσεις μπορούμε να τα εκμεταλλευτούμε για να λάβουμε μια αδρή εκτίμηση του τρόπου κίνησης των διανυσμάτων. Σε κάθε επίπεδο[61] που ορίζεται από 2 οποιαδήποτε ιδιοανύσματα του πίνακα η κίνηση των διανυσμάτων θα είναι από αυτό με τη μικρότερη ιδιοτιμή προς αυτό με τη μεγαλύτερη. Βγαίνοντας εκτός ενός τέτοιου επιπέδου, θα έχουμε μια σύνθετη μετακίνηση και προς το ιδιοάνυσμα με την ακόμη πιο μεγάλη ιδιοτιμή.

Υπάρχει και μια περίπτωση που σιωπηρά την έχουμε αποκρύψει σε όλη την προηγούμενη συζήτηση. Όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο οδηγεί σε λύσεις με κάποια πολλαπλότητα θεωρήσαμε ότι τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα ταυτίζονται. Υπάρχει όμως μια πραγματικά πολύ απλή αλλά ιδιάζουσα εξαίρεση. Αν η αφαίρεση από τον πίνακα της διπλής (ή πολλαπλής) ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου επί τον μοναδιαίο, μας οδηγεί σε έναν πίνακα με μόνο μηδενικά τότε τα ιδιοανύσματα δεν είναι μόνο ένα. Ο μηδενικός πίνακας έχει κάθε διάνυσμα ως ιδιοάνυσμα, οπότε σε έναν τέτοιο πίνακα μπορούμε πάλι να έχουμε τόσα ιδιοανύσματα όσα ή διάσταση του πίνακα, παρ' ότι όλα αυτά χαρακτηρίζονται από την ίδια ιδιοτιμή. Για παράδειγμα, ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας έχει ως ιδιοανύσματα τα

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{και} \ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

ή και οποιαδήποτε άλλα μη συγγραμμικά διανύσματα, με κοινή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

3.8.1 Ιδιοανύσματα συμμετρικών πινάκων

Η περίπτωση των συμμετρικών πινάκων παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα εικόνα όσον αφορά στα ιδιοανύσματα και τις ιδιοτιμές τους. Προς τούτο, ας φανταστούμε έναν τετραγωνικό, οποιασδήποτε διάστασης, συμμετρικό πίνακα **S**. Θα ισχύει

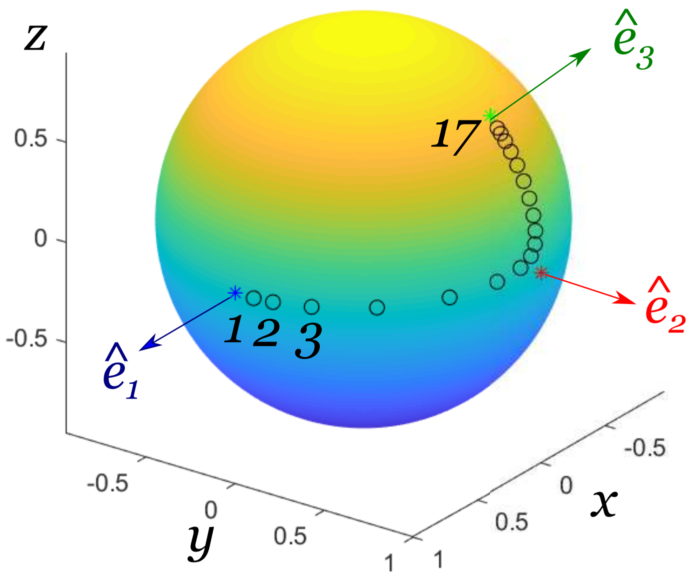
$$\mathbf{S}\,\mathbf{X}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{X}^{(i)} , \tag{40}$$

όπου λ_i είναι η i-οστή ιδιοτιμή του πίνακα **S**, η οποία αντιστοιχεί στο ιδιοάνυσμα $\mathbf{X}^{(i)}$[62] Ας γράψουμε τώρα και άλλη μια τέτοια σχέση που αφορά ένα άλλο ιδιοάνυσμα που έχει διαφορετική ιδιοτιμή:

$$\mathbf{S}\mathbf{X}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{X}^{(j)} ,$$

[61] Πιο σωστά υπερεπίπεδο αν πρόκειται για περισσότερες των 3 διαστάσεων.

[62] Αποφασίσαμε να αλλάξουμε τη γραφή του ιδιοανύσματος μεταφέροντας την αρίθμηση του σε μια παρένθεση, προκειμένου να μην τη συγχέουμε με κάποιον δείκτη που πιθανώς θα χρειαστούμε για να σημειώσουμε τις συνιστώσες του.



Σχήμα 27: Στο σχήμα αυτό παρουσιάζεται η “πορεία” ενός διανύσματος κατόπιν 17 διαδοχικών δράσεων του πίνακα. Ο πίνακας που επιλέξαμε είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

που έχει ως ιδιοανύσματα τα $\mathbf{X}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top, \mathbf{X}_2 = (0, 1, 0)^\top, \mathbf{X}_3 = (1, 0, 0)^\top$ και αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Το αρχικό διάνυσμα επιλέχθηκε πολύ κοντά στο $\mathbf{X}_1$ και συγκεκριμένα επιλέχθηκε να είναι $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1 + 0.1\mathbf{X}_2 + 0.001\mathbf{X}_3$, ώστε να κινηθεί κοντά στο επίπεδο των $\mathbf{X}_1$ και $\mathbf{X}_2$ από το #1 προς το #2. Η πολύ μικρή συνιστώσα, όμως του μεγάλου ελκυστή $\mathbf{X}_3$, θα οδηγήσει το διάνυσμα μετά από 7,8 βήματα να στρίψει κοντά στο $\mathbf{X}_2$ και να οδηγηθεί τελικά πολύ κοντά στο $\mathbf{X}_3$. Οι διαδοχικές αριθμημένες βούλες στο διάγραμμα δεν είναι ακριβώς τα μετασχηματισμένα διανύσματα, αλλά οι μήκους 1 κατευθύνσεις τους πάνω στη σφαίρα. Τα μοναδιαία ιδιοανύσματα σημειώνονται με χρωματιστά βέλη πάνω στη σφαίρα ακτίνας 1. Το μπλε είναι το $\hat{e}_1 = \mathbf{X}_1$, το κόκκινο το $\hat{e}_2 = \mathbf{X}_2$ και το πράσινο το $\hat{e}_3 = \mathbf{X}_3$.

με $\lambda_i \neq \lambda_j$. Στη συνέχεια ας πολλαπλασιάσουμε την (40) από αριστερά με το $(\mathbf{X}^{(j)})^\top$ και την (3.8.1) από αριστερά με το $(\mathbf{X}^{(i)})^\top$ και ας τις αφαιρέσουμε κατά μέλη:

$$(\mathbf{X}^{(j)})^\top \mathbf{S}\, \mathbf{X}^{(i)} - (\mathbf{X}^{(i)})^\top \mathbf{S} \mathbf{X}^{(j)} = \lambda_i (\mathbf{X}^{(j)})^\top \mathbf{X}^{(i)} - \lambda_j (\mathbf{X}^{(i)})^\top \mathbf{X}^{(j)} \,. \tag{41}$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο των ιδιοανυσμάτων στο δεξί σκέλος $(\mathbf{X}^{(j)})^\top \mathbf{X}^{(i)}$ είναι το ίδιο με το $(\mathbf{X}^{(i)})^\top \mathbf{X}^{(j)}$, αφού και οι δύο εκφράσεις οδηγούν στο βαθμωτό εσωτερικό γινόμενο $\vec{X}^{(i)} \cdot \vec{X}^{(j)}$. Ομοίως, και τα δύο γινόμενα στο αριστερό σκέλος της (41) ταυτίζονται εξαιτίας της συμμετρικότητας του $\mathbf{S}$. Για να το δείτε αυτό ας χρησιμοποιήσουμε δείκτες (και αθροιστική σύμβαση) για να υπολογίσουμε το γινόμενο $(\mathbf{X}^{(j)})^\top \mathbf{S}\, \mathbf{X}^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}^{(j)})^\top \mathbf{S}\, \mathbf{X}^{(i)} &= (\mathbf{X}^{(j)})_a (\mathbf{S})_{ab} (\mathbf{X}^{(i)})_b \\
&= (\mathbf{X}^{(j)})_a (\mathbf{S})_{ba} (\mathbf{X}^{(i)})_b \\
&= (\mathbf{X}^{(i)})_b (\mathbf{S})_{ba} (\mathbf{X}^{(j)})_a \\
&= (\mathbf{X}^{(i)})^\top \mathbf{S}\, \mathbf{X}^{(j)} \; .
\end{aligned}$$

Στη δεύτερη γραμμή εκμεταλλευτήκαμε τη συμμετρικότητα του $\mathbf{S}$, ενώ στην τρίτη γραμμή μετακινήσαμε τις συνιστώσες $(\mathbf{X}^{(j)})_a$ και $(\mathbf{X}^{(i)})_b$ στο εκάστοτε γινόμενο που εμφανίζεται κατά την ανάπτυξη του αθροίσματος που προκύπτει από την αθροιστική σύμβαση. Επομένως το αριστερό μέλος της (41) είναι 0 και εφόσον $\lambda_i \neq \lambda_j$, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για το δεξί μέλος. Με άλλα λόγια, τα ιδιοανύσματα του πίνακα με διαφορετικές ιδιοτιμές οφείλουν να είναι κάθετα το ένα στο άλλο!

Θα εκμεταλλευτούμε τώρα αυτή την ιδιότητα ορθογωνιότητας για να αναδιαμορφώσουμε τον πίνακα $\mathbf{S}$. Πρώτα από όλα, αφού το βασικό χαρακτηριστικό των ιδιοανυσμάτων είναι οι διευθύνσεις τους και όχι τα μέτρα τους ας τους δώσουμε μια πιο ομοιόμορφη μορφή. Ας τα κάνουμε όλα μοναδιαία, πολλαπλασιάζοντάς τα με κατάλληλους συντελεστές $N^{(a)}$ έτσι ώστε

$$(N^{(a)} \vec{X}^{(a)}) \cdot (N^{(a)} \vec{X}^{(a)}) = 1$$

(χωρίς την αθροιστική σύμβαση) για κάθε a-ιδιοάνυσμα. Προφανώς η σταθερά κανονικοποίησης του εκάστοτε ιδιοανύσματος θα πρέπει να επιλεχθεί ως

$$N^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{\vec{X}^{(a)} \cdot \vec{X}^{(a)}}} \; .$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια αυτά τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα στη θέση των αρχικών ιδιοανυσμάτων

$$\mathbf{X}^{(a)} \to N^{(a)} \mathbf{X}^{(a)}$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν νέο πίνακα διάστασης $N \times N$, τον $\mathbf{X}$, ο οποίος να έχει ως στήλες τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα με τη σειρά τους

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}^{(1)}\ \mathbf{X}^{(2)}\ \cdots\ \mathbf{X}^{(N)} \right)$$

ή αλλιώς

$$(\mathbf{X})_{ij} = (\mathbf{X})_i^{(j)} \; .$$

Η δράση του πίνακα $\mathbf{S}$ εξ αριστερών σε αυτόν τον πίνακα θα δώσει

$$(\mathbf{S}\,\mathbf{X})_{ij} = (\mathbf{S})_{ik}(\mathbf{X})_{kj} = (\mathbf{S})_{ik}\ (\mathbf{X}^{(j)})_k = (\mathbf{S}\,\mathbf{X}^{(j)})_i = \lambda_j(\mathbf{X}^{(j)})_i$$

με άλλα λόγια ο $\mathbf{S}\ \mathbf{X}$ θα είναι ο πίνακας που έχει ως j-στήλη το j-στό ιδιοάνυσμα πολλαπλασιασμένο με την ιδιοτιμή του:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{X}^{(1)} & \lambda_2\mathbf{X}^{(2)} & \cdots & \lambda_N\mathbf{X}^{(N)} \end{pmatrix}\ .$$

Τέλος ας πολλαπλασιάσουμε αυτό το κατασκεύασμα από αριστερά με τον ανάστροφο του $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}^\top\mathbf{S}\,\mathbf{X}\ .$$

αρκεί να προσέξουμε ότι η i-οστή γραμμή του $\mathbf{X}^\top$ είναι το i-οστό ιδιοάνυσμα, το οποίο αν πολλαπλασιαστεί με την j-οστή στήλη του $\mathbf{S}\ \mathbf{X}$ που όπως είπαμε είναι το j-οστό ιδιοάνυσμα πολλαπλασιασμένο με την ιδιοτιμή του:

$$(\mathbf{X}^\top\mathbf{S}\,\mathbf{X}_{ij} = (\mathbf{X}^\top)_{ik}(\mathbf{S}\,\mathbf{X})_{kj} = (\mathbf{X}^{(i)})_k\lambda_j(\mathbf{X}^{(j)})_k = \lambda_j(\mathbf{X}^{(i)})^\top(\mathbf{X}^{(j)})\ . \tag{42}$$

Δεδομένης, τώρα, της ορθογωνιότητας των διαφορετικών ιδιοανυσμάτων και του μοναδιαίου μήκους του καθενός εξ' αυτών βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{X}^\top\mathbf{S}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}\ .$$

Ο συμμετρικός πίνακας $\mathbf{S}$ ως σάντουιτς του πίνακα των ιδιοανυσμάτων του (εκ δεξιών) και του αναστρόφου των ιδιοανυσμάτων του εξ αριστερών, διαγωνιοποιείται με τις ιδιοτιμές του να εμφανίζεται στη θέση των διαγωνίων στοιχείων.

Κλείνοντας, το εδάφιο αυτό, ίσως να έχετε σκεφθεί ότι τα ερωτήματα που θέτουμε είναι απλώς περίεργες διαπιστώσεις-παιχνίδια και τίποτε παραπάνω με αφηρημένα αριθμητικά αντικείμενα. Αυτή η ένσταση είναι παντελώς λανθασμένη. Στη Φυσική δουλεύουμε με ποσότητες που η καλύτερη αναπαράστασή τους δίνεται από πίνακες. Το πώς συμπεριφέρονται οι πίνακες, ποια είναι τα ιδιοανύσματά τους και οι ιδιοτιμές τους έχουν εξέχουσα φυσική σημασία.

3.9 Μια φυσική εφαρμογή χρήσης των πινάκων

Έστω δύο σώματα 1, 2, τα οποία ολισθαίνουν χωρίς τριβές πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο κινούμενα σε μια ευθεία. Όταν τα δύο σώματα συγκρουστούν, η κρούση είναι ελαστική. Το ένα από τα δύο σώματα, ας υποθέσουμε το 1, βρίσκεται ανάμεσα στο 2 και σε ένα τοίχωμα. Αν το 1 συγκρουστεί με το τοίχωμα, η κρούση είναι ανελαστική και η ταχύτητα του 1 μετά την κρούση αναστρέφεται και μεγαλώνει (ή μικραίνει) κατά τον παράγοντα k με $k > 1$ (ή $k < 1$). Το ζητούμενο είναι να ελέγξουμε, δεδομένων των αρχικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων, πόσες κρούσεις των δύο σωμάτων μπορούν να συμβούν και ποια θα είναι η ταχύτητα αυτών μετά τη N-οστή αυτή κρούση.

Η μελέτη αυτού του προβλήματος καθίσταται εξαιρετικά κουραστική, αν σε κάθε κρούση επαναλαμβάνουμε τη συνθήκη διατήρησης της ορμής και διατήρησης (ή μη διατήρησης της ενέργειας) προκειμένου να ξεκινήσουμε τη μελέτη της επόμενης κρούσης. Η διαδικασία απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό αν η διαδικασία μελετηθεί ως μια γραμμική διαδικασία μετατροπής των αρχικών ταχυτήτων σε τελικές με τη βοήθεια πινάκων και ακόμη περισσότερο με την ανάλυση των ταχυτήτων στα ιδιοανύσματα αυτών των πινάκων.

Σε κάθε ελαστική κρούση θα ισχύει

$$\begin{aligned} m_1 v_1^{(N-1)} + m_2 v_2^{(N-1)} &= m_1 v_1^{(N)} + m_2 v_2^{(N)} \\ \frac{1}{2}[m_1 (v_1^{(N-1)})^2 + m_2 (v_2^{(N-1)})^2] &= \frac{1}{2}[m_1 (v_1^{(N)})^2 + m_2 (v_2^{(N)})^2] \ . \end{aligned}$$

Με μια μετακίνηση όρων και στις δύο εξισώσεις και διαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων που προκύπτουν βρίσκουμε

$$v_1^{(N-1)} + v_1^{(N)} = v_2^{(N-1)} + v_2^{(N)} \ . \tag{43}$$

χρησιμοποιώντας την 1η εξίσωση από το πρώτο σετ εξισώσεων και την εξίσωση (43) μπορούμε να σχηματίσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} m_1 v_1^{(N-1)} + m_2 v_2^{(N-1)} &= m_1 v_1^{(N)} + m_2 v_2^{(N)} \\ v_1^{(N-1)} - v_2^{(N-1)} &= -v_1^{(N)} + v_2^{(N)} \end{aligned}$$

ή με τη χρήση πινάκων

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(N-1)} \\ v_2^{(N-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(N)} \\ v_2^{(N)} \end{pmatrix} \ . \tag{44}$$

Συμβολικά

$$\mathbf{A}\mathbf{V}^{(N-1)} = \mathbf{B}\mathbf{V}^{(N)}$$

Μέσω αντιστροφής του **B** μπορούμε να υπολογίσουμε το “διάνυσμα” των ταχυτήτων μετά την -οστή κρούση, αν γνωρίζουμε τις ταχύτητες πριν τη N-οστή κρούση, ως ακολούθως:

$$\mathbf{V}^{(N)} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\ \mathbf{V}^{(N-1)} \ .$$

Τον πίνακα $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ μπορούμε να τον συμβολίσουμε με $\mathbf{C}$ και ξέρουμε ότι θα ισούται με

$$\mathbf{C} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} 1 & -m_2 \\ 1 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & 2m_2 \\ 2m_1 & m_2 - m_1 \end{pmatrix} .$$

Η περίπτωση της ανελαστικής κρούσης με το τοίχωμα αφορά αποκλειστικά το σώμα 1 και δρα ως αντιστροφή και πολλαπλασιασμό με τον παράγοντα k της ταχύτητας αυτού. Το σώμα 2 παραμένει ανεπηρέαστο. Ο αντίστοιχος πίνακας μετασχηματισμού των ταχυτήτων θα είναι

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Μετά και από αυτή την “υπερελαστική” κρούση οι ταχύτητες των δύο σωμάτων θα είναι

$$\mathbf{WC} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & 2m_2 \\ 2m_1 & m_2 - m_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} k(m_2 - m_1) & -2km_2 \\ 2m_1 & m_2 - m_1 \end{pmatrix} .$$

Έτσι, λοιπόν, μετά από πέντε, για παράδειγμα, κρούσεις (τρεις ελαστικές μεταξύ των σωμάτων και δύο του πρώτου με το τοίχωμα), η ταχύτητα των δύο σωμάτων θα είναι

$$\mathbf{V}^{(5)} = \mathbf{C}\ \mathbf{W}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}\ \mathbf{C}\ \mathbf{V}^{(0)} .$$

Κάθε φορά ο συνδυασμός των πινάκων $\mathbf{C}$ και $\mathbf{W}$, $\mathbf{WC}$, δρώντας στο (πολλαπλασιάζοντας το) διάνυσμα των ταχυτήτων, οδηγεί στις νέες ταχύτητες μετά από μια διπλή σύγκρουση (μία μεταξύ των σωμάτων και μία με το τοίχωμα). Αν το αποτέλεσμα οδηγήσει σε $v_1 > v_2$, τότε η σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων θα επαναληφθεί, αν όχι δεν θα υπάρξει επόμενη σύγκρουση. Επίσης κάθε φορά που δρα ο $\mathbf{C}$ θα πρέπει να ελεγχθεί αν το σώμα 1 απέκτησε αρνητική ταχύτητα. Σε διαφορετική περίπτωση δεν θα συμβεί κρούση του πρώτου σώματος με το τοίχωμα και επομένως θα σταματήσει η αλυσίδα των κρούσεων. Εφόσον οι κρούσεις επαναλαμβάνονται (οι προηγούμενοι δύο έλεγχοι αποβαίνουν θετικοί), ο πίνακας $\mathbf{WC}$, υψωμένος σε οποιαδήποτε δύναμη, θα μας δώσει το αποτέλεσμα μετά από το πλήθος αυτών των κρούσεων.

Ας θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα: $m_1 = 1, m_2 = 6, k = 6$. Σε αυτή την περίπτωση

$$\mathbf{C} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} , \ \mathbf{WC} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 30 & -72 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

Επομένως για αρχικές ταχύτητες των δύο σωμάτων $v_1^{(0)} = 2, v_2^{(0)} = 1$, οι ταχύτητες μετά την ελαστική κρούση των δύο σωμάτων (θεωρούμε ότι το σώμα #1 βρίσκεται πίσω από το #2, έτσι ώστε να συγκρουστεί με το #2) θα είναι

$$\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 9/7 \end{pmatrix} .$$

Αφού $v_1^{(1)} > 0$, το σώμα #1 δεν θα χτυπήσει στο τοίχωμα και οι συγκρούσεις δεν θα συνεχιστούν. Αν αρχικά είχαμε $v_1^{(0)} = 3, v_2^{(0)} = 1$, οι ταχύτητες των σωμάτων μετά τη μεταξύ τους σύγκρουση θα ήταν

$$\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 \\ 11/7 \end{pmatrix} .$$

Στην περίπτωση αυτή το σώμα #1 θα αλλάξει φορά και θα χτυπήσει στο τοίχωμα, οπότε μετά θα έχει ταχύτητα

$$\begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{WC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/7 \\ 11/7 \end{pmatrix} .$$

Οι συγκρούσεις θα συνεχιστούν.

Υπάρχει άραγε κάποιος πιο απλός τρόπος να ελέγξουμε για πόσο θα συνεχιστούν οι κρούσεις, ή θα πρέπει να ελέγχουμε βήμα-βήμα την όλη διαδικασία; Η απάντηση είναι καταφατική και βρίσκεται κρυπτογραφημένοι στα ιδιοανύσματα και τις ιδιοτιμές των πινάκων. Κάθε ολοκληρωμένη διπλή κρούση σχετίζεται με τον πίνακα **WC**. Τα ιδιοανύσματα $\mathbf{X}_i$ και οι ιδιοτιμές αυτού του πίνακα λ_i υποδεικνύουν εκείνες τις αρχικές συνθήκες που επαναλαμβάνονται ως προς τη σχέση των ταχυτήτων μεταξύ των δύο σωμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, βρίσκουμε εύκολα (με τη μέθοδο που είδαμε σο προηγούμενο εδάφιο) ότι

$$\mathbf{WC} \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \mathbf{WC} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή τα ιδιοανύσματα είναι

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των ιδιοανυσμάτων είναι ότι περιγράφουν αρχικές συνθήκες οι οποίες επαναλαμβάνονται, υπό μια έννοια, οπότε μπορούμε να ελέγξουμε αν αυτές ικανοποιούν τα κριτήρια συνέχισης των κρούσεων. Για παράδειγμα

$$\mathbf{CX}_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

που εγγυάται ότ το σώμα #1 θα αλλάξει φορά μετά την κρούση με το #2 και θα χτυπήσει το τοίχωμα. Όμοια

$$\mathbf{CX}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Και οι δύο περιπτώσεις αρχικών συνθηκών θα εξακολουθήσουν επ' άπειρω αφού πάντα το $\#1$ θα επιστρέφει στο τοίχωμα μετά τη σύγκρουσή του με το $\#2$.

Τι γίνεται όμως σε μια άλλη τυχαία περίπτωση αρχικών συνθηκών; Η απάντηση βρίσκεται και πάλι στις δύο αυτές ξεχωριστές περιπτώσεις των ιδιοανυσμάτων. Η τυχαία αρχική συνθήκη μπορεί να γραφεί ως κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός αυτών:

$$\mathbf{V}^{(0)} = \begin{pmatrix} v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \end{pmatrix} = a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 \ . \tag{45}$$

Ας υποθέσουμε ότι με αυτές τις αρχικές συνθήκες έχουν ολοκληρωθεί N διπλές κρούσεις. Η ταχύτητες των σωμάτων μετά από αυτές τις κρούσεις θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{(2N)} &= (\mathbf{WC})^N\,(a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2) \\ &= a_1(\mathbf{WC})^N\mathbf{X}_1 + a_2(\mathbf{WC})^N\mathbf{X}_2 \\ &= a_1 2^N\mathbf{X}_1 + a_2 3^N\mathbf{X}_2 \end{aligned}$$

Προκειμένου να διαπιστώσουμε αν θα γίνει και η $(N+1)$-οστή διπλή κρούση, θα πρέπει να ελέγξουμε αν η $2N+1$-οστή κρούση (μεταξύ των δύο σωμάτων) θα οδηγήσει σε αντιστροφή της κίνησης του $\#1$. Αυτό είναι εύκολο να ελεγχθεί αφού ξέρουμε τη δράση του $\mathbf{C}$ στα $\mathbf{X}_1$ και $\mathbf{X}_2$. Έτσι

$$\begin{aligned} \mathbf{CV}^{(2N)} &= \mathbf{C}\left(a_1 2^N\mathbf{X}_1 + a_2 3^N\mathbf{X}_2\right) \\ &= a_1 2^N\mathbf{CX}_1 + a_2 3^N\mathbf{CX}_2 \\ &= a_1 2^N\begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 3^N\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Μη βιαστείτε να αναφωνίσετε ότι η ταχύτητα του σώματος $\#1$ θα είναι πάντα αρνητική αφού και τα δύο ιδιοανύσματα θα οδηγήσουν σε αρνητική ταχύτητα το v_1· δεν γνωρίζετε τα πρόσημα των a_1, a_2! Μπορούν κάλλιστα τα δύο σώματα να έχουν αρχικές ταχύτητες θετικές, ικανές να οδηγήσουν σε σύγκρουση τα δύο σώματα, αλλά κάποιο από τα a_1, a_2 μπορεί να είναι αρνητικό, οπότε τότε η αντιστροφή της ταχύτητας του $\#1$ μετά την $(2N+1)$-οστή κρούση δεν θα είναι δεδομένη. Η επανάληψη των κρούσεων θα σταματήσει μετά από $2N+1$ κρούσεις αν

$$(-3/2)2^N a_1 - 4\cdot 3^N a_2 < 0 \ . \tag{46}$$

Αν θέλουμε να λάβουμε μια τέτοια σχέση ναφορικά με τις αρχικές ταχύτητες αυτές καθεαυτές θα πρέπει να εκφράσουμε τα a_1, a_2 μέσω αυτών. Λύνοντας την (45) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (9/2)a_1 + 8a_2 &= v_1^{(0)} \\ a_1 + a_2 &= v_2^{(0)} \end{aligned}$$

οπότε

$$a_1 = \frac{16v_2^{(0)} - 2v_1^{(0)}}{7} \ , \ a_2 = \frac{2v_1^{(0)} - 9v_2^{(0)}}{7} \ .$$

Έτσι το κριτήριο επαναληψιμότητας (46) διαμορφώνεται ως εξής: Αν οι αρχικές ταχύτητες ικανοποιούν την ανισότητα

$$(3 \cdot 2^N - 8 \cdot 3^N)v_1^{(0)} < (24 \cdot 2^N - 36 \cdot 3^N)v_2^{(0)} \ , \tag{47}$$

οι κρούσεις θα συνεχίσουν. Προκειμένου να απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση, ας τη διαιρέσουμε με 2^N και ας αντιστρέψουμε τα πρόσημα

$$[8(3/2) - 3]v_1^{(0)} > [36(3/2) - 24]v_2^{(0)} \ .$$

Στο προηγούμενο ζευγάρι δοκιμαστικών ταχυτήτων $v_1^{(0)} = 2, v_2^{(0)} = 1$ η παραπάνω ανισότητα δεν επαληθεύεται για $N = 0$, οπότε μετά την 1η κρούση δεν θα ξανασυμβεί άλλη. Αντίθετα στο δεύτερο ζευγάρι δοκιμαστικών ταχυτήτων $v_1^{(0)} = 3, v_2^{(0)} = 1$ η παραπάνω ανισότητα επαληθεύεται και για $N = 0$ και για $N = 1$, αλλά όχι για $N = 2$. Θα συμβούν λοιπόν 2 διπλές κρούσεις, ενώ η 5η κρούση δεν θα δώσει αρνητική v_1 οπότε και οι κρούσεις θα σταματήσουν. Είναι εύκολο να δείτε ότι αν $v_1^{(0)} > (9/2)v_2^{(0)}$ οι κρούσεις θα συνεχιστούν επ' άπειρω, αφού η ακολουθία

$$b_N = \frac{36(3/2)^N - 24}{8(3/2)^N - 3}$$

είναι αύξουσα με όριο το $9/2$.

Και με τα ιδιοανύσματα, ως αρχικές συνθήκες, τι ισχύει; Η απάντηση είναι ότι εφόσον η δράση του **C** και στα δύο ιδιοανύσματα θα οδηγήσει σε αρνητική v_1, όπως είδαμε παραπάνω, οι κρούσεις θα συνεχίζονται για πάντα και κάθε φορά, μετά από κάθε διπλή κρούση, οι ταχύτητες θα μεγαλώνουν κατά τον παράγοντα $\lambda_1 = 2$ για το πρώτο σετ ταχυτήτων $v_1^{(0)} = 4.5, v_2^{(0)} = 1$ και $\lambda_2 = 3$ για το δεύτερο σετ ταχυτήτων $v_1^{(0)} = 8, v_2^{(0)} = 1$. Η αύξηση των ταχυτήτων είτε στη πρώτη είτε στη δεύτερη περίπτωση, οφείλεται αποκλειστικά στην υπερελαστική κρούση με το τοίχωμα που συνεχώς εισάγει ενέργεια στο σύστημα.

3.9.1 Υπολογισμός και της ενέργειας με πίνακες

Η χρήση πινάκων μπορεί να επεκταθεί και στον υπολογισμό της ενέργειας του συστήματος. Οι πίνακες που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα είχαν ενεργητικό χαρακτήρα: Δρούσαν σε διανύσματα που είχαν ως συνιστώσες τις ταχύτητες των δύο σωμάτων και μας κατασκεύαζαν, με γραμμικό τρόπο, τις ταχύτητες μετά από κάποιες διεργασίες κρούσεων. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες παθητικά, προκειμένου να *μετρήσουμε* ποσότητες (κινητικές ενέργειες) που εκφράζονται με διγραμμική μορφή.[63] Συγκεκριμμένα η ενέργεια του συστήματος σε κάθε στιγμή είναι η βαθμωτή ποσότητα

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \ .$$

Η διγραμμική αυτή βαθμωτή ποσότητα θα μπορούσε να προκύψει από το διάνυσμα των δύο ταχυτήτων ως ακολούθως

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \, \mathbf{V}^\top \, \mathbf{M} \, \mathbf{V} \ , \end{aligned} \tag{48}$$

όπου

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \ .$$

Ίσως η παραπάνω κατασκευή με το γινόμενο των τριών πινάκων να σας ξάφνιασε και να σας φάνηκε ουρανοκατέβατη αλλά είναι εύκολο να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα εκτελώντας τις πράξεις. Το σημαντικό είναι ότι επιλέγοντας τις διαστάσεις των πινάκων όπως παραπάνω ($(1 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 1)$) τελικά κατασκευάσαμε μια βαθμωτή ποσότητα, ένα νούμερο δηλαδή. Ο τετραγωνικός πίνακας **M** μπορεί να ειδωθεί ως ένας μετρικός πίνακας που χρησιμοποιείται για να αποδώσει τα μέτρα των δύο κινητικών ενεργειών, μέσω της εξάρτησης αυτών από τις μάζες των δύο σωμάτων.

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια μετά από τις $2N$ κρούσεις του συστήματος εφόσον αυτές έχουν επιτευχθεί. Μάλιστα μπορούμε να εκμεταλλευτούμε και πάλι την ανάλυση των αρχικών ταχυτήτων στα ιδιοανύσματα του **WC**, για να υπολογίσουμε μέσω της παραπάνω διγραμμικής μορφής την ενέργεια του συστήματος.

$$\begin{aligned} E^{(N)} &= \frac{1}{2}(a_1 2^N \mathbf{X}_1^\top + a_2 3^N \mathbf{X}_2^\top) \mathbf{M} (a_1 2^N \mathbf{X}_1 + a_2 3^N \mathbf{X}_2) \\ &= \frac{1}{2} \left[(a_1 2^N)^2 \mathbf{X}_1^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_1 + (a_2 3^N)^2 \mathbf{X}_2^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_2 + (a_1 a_2 6^N) \mathbf{X}_1^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_2 + (a_2 a_1 6^N) \mathbf{X}_2^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_1 \right] \ . \end{aligned}$$

Οι 4 διγραμμικές μορφές στην παραπάνω έκφραση μπορούν εύκολα να υπολογιστούν για τα συγκεκριμένα ιδιοανύσματα και τον πίνακα **M** με τις συγκεκριμένες μάζες:

$$\mathbf{X}_1^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_1 = \frac{105}{4} \ ,$$

[63]Διγραμμική μορφή είναι οποιαδήποτε μορφή ή οποία είναι γραμμική ως προς δύο μεταβλητές π.χ. η $2xy$ ως προς x και y, ή $3\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ ως προς τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$. Οι δύο αυτές μεταβλητές θα μπορούσαν να είναι και οι ίδιες, π.χ. $\sqrt{2}\vec{v} \cdot \vec{v}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_2^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_2 &= 70 \ , \\
\mathbf{X}_1^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_2 &= 42 \ , \\
\mathbf{X}_2^\top \mathbf{M} \mathbf{X}_1 &= 42 \ .
\end{aligned}
$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η ισότητα των δύο τελευταίων εκφράσεων δεν είναι συμπτωματική· οφείλεται στη συμμετρικότητα του πίνακα **M**.

Δεδομένης, λοιπόν, της δυνατότητας του συστήματος να φτάσει τις N διπλές κρούσεις, η ενέργεια του συστήματος θα έχει φτάσει την τιμή

$$
E^{(N)} = \frac{1}{2}\left[\frac{105}{4} a_1^2 \cdot 4^N + 70 \cdot a_2^2 \cdot 9^N + 2 \cdot 42 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot 6^N \ .\right]
$$

Συγκρίνοντάς την με την αρχική ενέργεια

$$
E^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\frac{105}{4} a_1^2 \ + 70 \cdot a_2^2 + 2 \cdot 42 \cdot a_1 \cdot a_2 \ ,\right]
$$

μπορούμε να βρούμε για ποιες αρχικές ταχύτητες, μέσω της κατάλληλης επιλογής των a_1, a_2 θα έχουμε την μέγιστη (ή την ελάχιστη) αύξηση της ενέργειας. Ο λόγος των ενεργειών μετά από N επαναλαμβανόμενες διπλές κρούσεις θα είναι

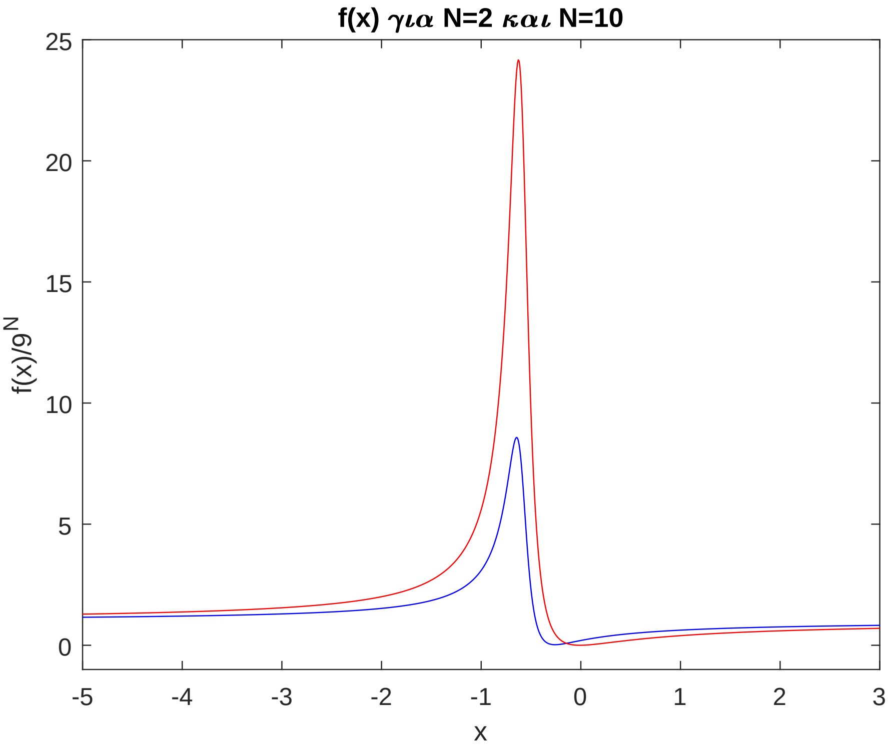
$$
\frac{E^{(N)}}{E^{(0)}} = \frac{\frac{105}{4} a_1^2 \cdot 4^N + 70 \cdot a_2^2 \cdot 9^N + 2 \cdot 42 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot 6^N}{\frac{105}{4} a_1^2 + 70 \cdot a_2^2 + 2 \cdot 42 \cdot a_1 \cdot a_2} \ .
$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το a_1^2 και αντικαθιστώντας το λόγο a_2/a_1 με μια μεταβλητή x κατασκευάζουμε μια συνάρτηση του x,

$$
f(x) = \frac{E^{(N)}}{E^{(0)}} = \frac{\frac{105}{4} \cdot 4^N + 70x^2 \cdot 9^N + 84x \cdot 6^N}{\frac{105}{4} + 70x^2 + 84x} \ ,
$$

της οποίας τα ακρότατα είναι τα ζητούμενα μέγιστα και ελάχιστα της αύξησης της ενέργειας μετά από N διπλές κρούσεις. Η συγκεκριμένη συνάρτηση (που έχει ως παράμετρο το πλήθος των κρούσεων N) παρουσιάζει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο σε δύο αντίστοιχες τιμές του x (βλ. σχήμα). Το πολύ ενδιαφέρον είναι ότι η μέγιστη αύξηση της ενέργειας ξεπερνά ακόμη και την αύξηση της ενέργειας της ιδιοκατάστασης $\mathbf{X}_2$ που παρουσιάζει τη μέγιστη μεγέθυνση (ιδιοτιμή) $\lambda_2 = 3$. Ας δούμε γιατί αυτό είναι δυνατό. Αφού η $\mathbf{X}_2$ είναι η κατάσταση που θα υποστεί τη μέγιστη αύξηση πρέπει να ψάξουμε για εκείνη την αρχική κατάσταση που θα έχει τη μέγιστη προβολή στη $\mathbf{X}_2$. Υπάρχει άλλη καλύτερη από την ίδια την $\mathbf{X}_2$; Ναι υπάρχει γιατί οι δύο ιδιοκαταστάσεις δεν είναι ορθογώνιες η μία στην άλλη, αλλά σχηματίζουν μια αρκετά μικρή γωνία. Έτσι αν φανταστούμε όλες τις αρχικές καταστάσεις

$$
\mathbf{X} = \begin{pmatrix} v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)}/\sqrt{6} \end{pmatrix}
$$

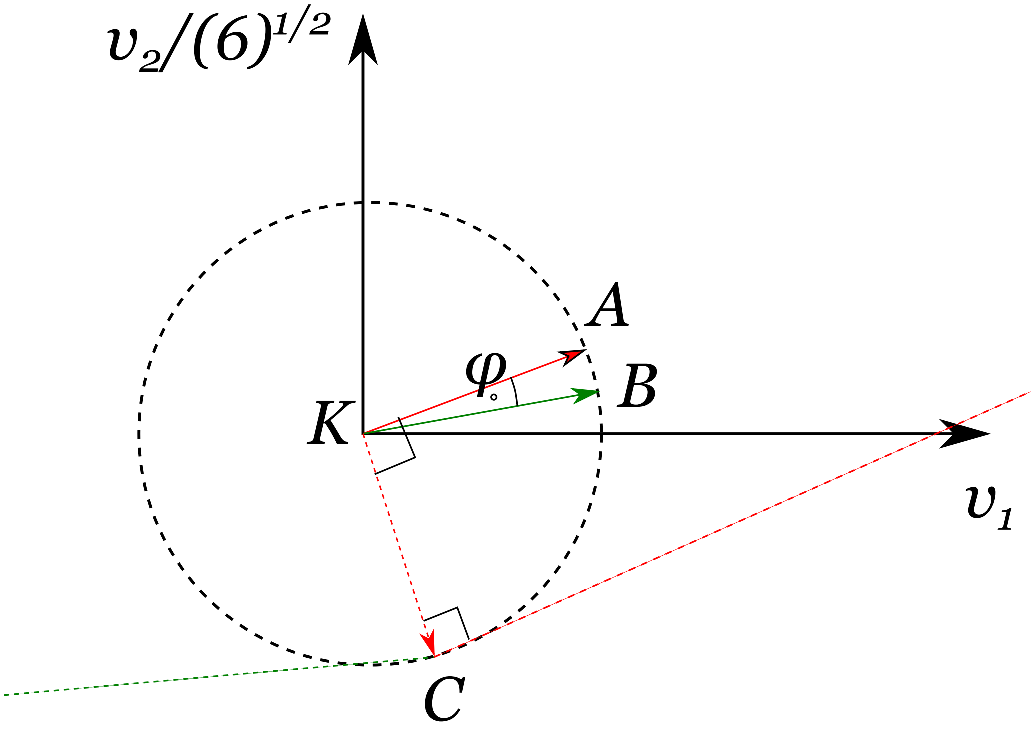


Σχήμα 28: Οι καμπύλες δείχνουν την αύξηση της ενέργειας μετά από $= 2$ διπλές κρούσεις (μπλε καμπύλη) και μετά από $= 10$ διπλές κρούσεις (κόκκινη καμπύλη). Επειδή η πραγματική αύξηση $f(x)$ είναι πολύ μεγάλη καθώς αυξάνει το πλήθος των κρούσεων, στον κατακόρυφο άξονα έχει παρασταθεί η $f(x)$ διαιρεμένη με το 9^N που αντιστοιχεί στην αύξηση της ενέργειας, αν η αρχική κατάσταση ήταν αμιγώς η $\mathbf{X}_2$.

που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένη ενέργεια σε ένα διάγραμμα όπου ο άξονας x είναι η $v_1^{(0)}$ και ο άξονας y είναι η $v_2^{(0)}/\sqrt{6}$ (οι καταστάσεις αυτές έχουν όλες ενέργεια $1/2$)[64] αυτές καταλαμβάνουν έναν κύκλο ακτίνας 1. Το επόμενο ερώτημα είναι ποια από αυτές τις καταστάσεις έχει τη μεγαλύτερη προβολή (μέσω ανάλυσης σε $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$) στην κατεύθυνση του $\mathbf{X}_2$; Όπως φαίνεται στο σχήμα, η “καλή” κατεύθυνση είναι αυτή που είναι ορθογώνια στο $\mathbf{X}_1$ προς την πλευρά του $\mathbf{X}_2$. Το διάνυσμα αυτό θα έχει τη μεγαλύτερη συνιστώσα κατά μήκος του $\mathbf{X}_2$. Επομένως, αυτή η αρχική κατάσταση θα παρουσιάσει τη μέγιστη αύξηση ενέργειας μετά από πολύ μεγάλο αριθμό κρούσεων αφού η μεν κατάσταση $\mathbf{X}_2$ θα μεγαλώσει κατά 3^N φορές, ενώ η άλλη, η $\mathbf{X}_1$, μόνο κατά 2^N φορές. Για πεπερασμένο αριθμό κρούσεων, επειδή και οι δύο ιδιοακταστάσεις θα μεγαλώσουν με κάποιο σχετικό βάρος (υπέρ της $\mathbf{X}_2$), η βέλτιστη αρχική κατάσταση

[64]Το $\sqrt{6}$ που εισαγάγαμε σχετίζεται με την μάζα του σώματος #2 ώστε η ενέργειες που αντιστοιχούν σε ταχύτητα $v_1 = 1, v_2 = 0$ και $v_1 = 0, v_2 = 1/\sqrt{6}$ να είναι ίδιες.

θα είναι πλησίον της $\vec{KC}$ αλλά όχι ακριβώς αυτή. Το γεγονός αυτό διακρίνεται στο διάγραμμα της $f(x)$ όπου η τιμή της x (που σχετίζεται με τη βέλτιστη κατεύθυνση) που παρουσιάζεται η μέγιστη αύξηση φαίνεται να εξαρτάται πολύ ασθενικά από την τιμή του N. Η δε μέγιστη αύξηση της ενέργειας έχει να κάνει με το πόσο μεγάλη είναι η αντίστοιχη συνιστώσα του $\vec{KC}$ κατά μήκος του $\mathbf{X}_2$. Για πολύ μεγάλο αριθμό κρούσεων, η αύξηση αυτή σχετίζεται με την συνιστώσα του $\vec{KC}$, που είναι κάθετο στο $\vec{KA}$, στην κατεύθυνση του $\vec{KB}$.[65] Ο λόγος $KB'/KC = 1/\tan\phi$ υψωμένος στο τετράγωνο είναι η ζητούμενη μέγιστη αύξηση της ενέργειας (αφού οι ενέργειες αντιστοιχούν στο τετράγωνο της ταχύτητας).



Σχήμα 29: Το διάνυσμα $\vec{KC}$ που είναι ορθογώνιο στο $\vec{KA} = \mathbf{X}_1$, όταν αναλυθεί στα $\vec{KA} = \mathbf{X}_1$ και $\vec{KB} = \mathbf{X}_2$ (σχεδιάζοντας τις διακεκομμένες παράλληλες) θα έχει τη μέγιστη προβολή στο $\mathbf{X}_2$.

3.10 Ορίζουσες και όγκοι

Στα προηγούμενα εδάφια (αλλά και στο 1ο κεφάλαιο) συναντήσαμε την ορίζουσα ενός πίνακα ως μια ποσότητα που φτιάχνεται από γινόμενα στοιχείων του πίνακα και

[65] Προς τούτο θεωρήστε το ορθογώνιο τρίγωνο KCB', όπου B' είναι η τομή της διακεκομμένης κόκκινης γραμμής με την ευθεία KB.

συνδέονται με το κατά πόσο οι γραμμικές εξισώσεις που προκύπτουν από τα στοιχεία του πίνακα είναι ανεξάρτητες (μη μηδενική ορίζουσα) ή όχι (μηδενική ορίζουσα). Είναι σημαντικό αφένος να ξέρουμε τι κρύβεται πίσω από το ιδιόμορφο αυτό άθροισμα γινόμένων και πως θα το υπολογίζουμε (ποια γινόμενα θα πρέπει να συμπεριλάβουμε) για έναν πίνακα οποιασδήποτε διάστασης. Ας ξεκινήσουμε, με τι άλλο; Με τον κλασικό μας πίνακα πρότυπο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

και ας τον βάλουμε να πολλαπλασιάσει τα μοναδιαία διανύσματα σε μονόστηλη αναπαράσταση $\mathbf{e}_1 = (1,0)^\top$ και $\mathbf{e}_2 = (0,1)^\top$.

$$\mathbf{A}\ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}'_1\ ,\ \mathbf{A}\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{e}'_2\ .$$

Την πράξη αυτή την έχουμε επαναλάβει για να δείξουμε πως παραμορφώνονται τα διανύσματα. Τώρα θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο εσωτερικό του τετράγωνου χωρίου που ορίζεται από τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Κάθε σημείο αυτού του τετραγώνου μπορεί να παραμετριστεί από δύο αριθμούς (συντεταγμένες) a_1, a_2 με $0 \le a_1 \le 1$ και $0 \le a_2 \le 1$, γράφοντας το τυχαίο διάνυσμα $\vec{v}$ εντός του τετραγώνου

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2\ .$$

Η απεικόνιση αυτού του διανύσματος κατόπιν της δράσης του πίνακα **A** θα είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των μετασχηματισμένων διανυσμάτων $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{A}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) = a_1\mathbf{e}'_1 + a_2\mathbf{e}'_2\ .$$

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι καθαρά συνέπεια της γραμμικής δράσης των πινάκων πάνω σε διανύσματα. Δεδομένου ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα που βρίσκεται εντός του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ αφού βρίσκεται στη διαγώνιο ενός παραλληλογράμμου με πλευρά το a_1 ποσοστό του $\vec{e}\,'_1$ και το a_2 ποσοστό του $\vec{e}\,'_2$. Στην ειδική περίπτωση που θα τύχει ο πίνακας να είναι τέτοιος ώστε τα $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ να είναι συγγραμμικά και το “παραλληλόγραμμο” των $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ να έχει εκφυλιστεί σε ένα ευθύγραμμο τμήμα (ή αλλιώς ένα παραλληλόγραμμο μηδενικού εμβαδού) το διάνυσμα $\vec{v}$ θα βρίσκεται εντός αυτού. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν κάθε σημείο του αρχικού τετραγώνου θα έχει απεικονιστεί σε ένα σημείο του τελικού παραλληλογράμμου. Ας μετρήσουμε τώρα το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου και του τελικού παραλληλογράμμου. Το πρώτο είναι $\mathcal{E}_0 = 1$ και το δεύτερο είναι όπως έχουμε μάθει

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= |\vec{e}\,'_1 \times \vec{e}\,'_2| \\ &= |\vec{e}\,'_1|\,|\vec{e}\,'_2| \sin\theta_{\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2} \\ &= \sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{1-\left(\frac{(1,3)\cdot(2,4)}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+4^2}}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{200}\sqrt{1-\frac{14^2}{200}} \\ &= 2\ . \end{aligned}$$

Το τελικό παραλληλόγραμμο έχει ακριβώς 2 φορές μεγαλύτερο εμβαδόν από το αρχικό τετράγωνο. Το νούμερο αυτό μεγέθυνσης της επιφάνειας είναι ακριβώς η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}$, τουλάχιστον κατ' απόλυτη τιμή αφού

$$\det(\mathbf{A}) = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2\ .$$

Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αυτό είναι απλώς σύμπτωση, αλλά αν ξαναδούμε το εμβαδόν υπό το πρίσμα των δύο αναλλοιώτων που ορίζονται από δύο διανύσματα του επιπέδου που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται καθαρό ότι το εμβαδόν συνδέεται με την ορίζουσα. Για του λόγου το αληθές

$$\begin{aligned} |\vec{e}\,'_1|^2|\vec{e}\,'_2|^2 &= (|\vec{e}\,'_1||\vec{e}\,'_2|\cos\theta_{\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2})^2 + (|\vec{e}\,'_1||\vec{e}\,'_2|\sin\theta_{\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2})^2 \\ &= (\vec{e}\,'_1\cdot\vec{e}\,'_2)^2 + (\mathcal{E}')^2 \\ (\mathcal{E}')^2 &= (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2)^2 - (x_1x_2+y_1y_2)^2 \\ &= x_1^1y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= (\det(\mathbf{A}))^2\ . \end{aligned} \tag{49}$$

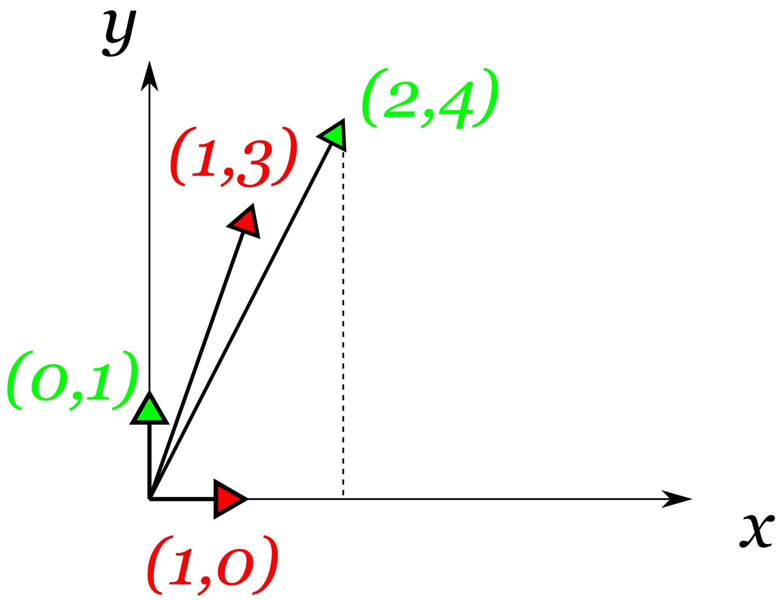
Στην τελευταία έκφραση φροντίσαμε να αντικαταστήσουμε τις πραγματικές αριθμητικές συντεταγμένες των διανυσμάτων με τις συμβολικές τους τιμές $\vec{e}\,'_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{e}\,'_2 = (x_2, y_2)$ για να εμφανιστεί καθαρά η έκφραση της ορίζουσας του πίνακα.

Και το αρνητικό πρόσημο της ορίζουσας; Αυτό σχετίζεται με το ότι οι επιφάνειες, όπως έχουμε πει, όντας προσανατολισμένα αντικείμενα (έχουν 2 πλευρές) μπορεί να είναι είτε θετικές, είτε αρνητικές. Η ορίζουσα ενός πίνακα διάστασης 2×2 είναι αρνητική όταν τα διανύσματα της πρώτης και της δεύτερης στήλης του πίνακα έχουν αλλάξει διάταξη σχετικά με τα μοναδιαία διανύσματα στον x και στον y άξονα αντίστοιχα (βλ. σχήμα).

Τι γίνεται όμως με πίνακες παραπάνω διάστασης; Τι εκφράζει η ορίζουσα σε αυτές τις περιπτώσεις; Η απάντηση είναι η ίδια. Εκφράζει την ποσοστιαία αλλαγή του αντίστοιχου του εμβαδού στις παραπάνω διαστάσεις. Δηλαδή, του όγκου στις 3 διαστάσεις, του υπερ-όγκου στις περισσότερες διαστάσεις.[66] Για παράδειγμα θεωρήστε τον 3×3 πίνακα

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[66] Ο όγκος στις N διαστάσεις καλείται N-όγκος και είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτός με σχήματα καθώς δεν έχουμε ως ανθρώπινα όντα εμπειρική αντίληψη των 4 και παραπάνω διαστάσεων. Παρ' ότι δεν μπορούμε να τις απεικονίσουμε, τα μαθηματικά, πάντως, μας δίνουν τη δυνατότητα να τις περιγράψουμε.



Σχήμα 30: Τα μετασχηματισμένα διανύσματα έχουν αλλάξει διάταξη, δηλαδή η σειρά που τα συναντάμε όταν στρεφόμαστε αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού, σε σχέση με τα αρχικά. Αυτό έχει ως συνέπεια ένα αρνητικό πρόσημο στην τιμή της ορίζουσας.

Οι τρεις στήλες του πίνακα αυτού αντιπροσωπεύουν τους μετασχηματισμούς που θα προκαλέσει ο πίνακας στα τρια μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

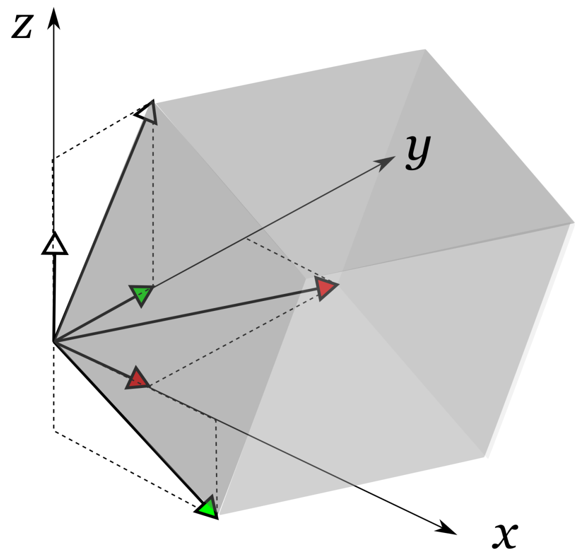
$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Be}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Be}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$
$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Be}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Τα τρία αυτά διανύσματα μπορείτε να τα φανταστείτε ως τις τρεις ακμές ενός παραλληλεπιπέδου (βλ. σχήμα), ενώ τα τρία μοναδιαία διανύσματα ως τις τρεις κάθετες μεταξύ τους ακμές ενός κύβου. Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{B}$ είναι

$$\det(\mathbf{B}) = -7^{67}$$

Το μεν 7 σημαίνει ότι ο όγκος του πλάγιου παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία, όχι πλέον ορθογώνια, διανύσματα $\mathbf{Be}_1, \mathbf{Be}_2, \mathbf{Be}_3$ είναι 7 φορές μεγαλύτερος από

[67] Παρακάτω θα μάθουμε πως να υπολογίζουμε ορίζουσες συστηματικά. Προς το παρόν μπορείτε να



Σχήμα 31: Τα τρία χρωματιστά μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων μετασχηματίστηκαν, μέσω του πίνακα **B**, στα τρία όχι ορθογώνια χρωματιστά διανύσματα εκτός των αξόνων. Το παραλληλεπίπεδο που σχηματίζουν αυτά έχει όγκο όσο η det(**B**).

τον όγκο του κύβου των $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Μάλιστα, στο πρώτο κεφάλαιο, μάθαμε πώς να υπολογίσουμε τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου από τα τρία διανύσματα που σχηματίζουν τις ακμές του, οπότε μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε ότι πράγματι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία αυτά μετασχηματισμένα διανύσματα είναι επτά:

$$\begin{aligned} V &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= ((1,2,0) \times (2,0,-1)) \cdot (0,1,2) \\ &= (-2,1,-4) \cdot (0,1,2)^{68} \\ &= -7\ . \end{aligned}$$

εκτελέσετε μόνοι σας τον υπολογισμό με μια από τις μεθόδους που γνωρίζετε για να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα.

Το πρόσημο της ορίζουσας, που εμφανίστηκε και στον όγκο του παραλληλεπιπέδου, σχετίζεται με το ότι αντίστοιχα με τις επιφάνειες και οι όγκοι είναι προσανατολισμένοι. Ενώ το κόκκινο $\mathbf{e}_1$ αν στραφεί προς το πράσινο $\mathbf{e}_2$ θα προσανατολίσει τον αντίχειρα του δεξιού χεριού κατά τον άξονα z, το μετασχηματισμένο κόκκινο $(1, 2, 0)$ αν στραφεί κατά το μετασχηματισμένο πράσινο $(2, 0, -1)$ θα προσανατολίσει τον αντίχειρα του δεξιού χεριού σε κατεύθυνση από την άλλη πλευρά του αντίστοιχου επιπέδου από αυτήν που βρίσκεται το τρίτο διάνυσμα $(0, 1, 2)$.

Τι γίνεται με τις παραπάνω διαστάσεις; Θα υπάρχουν πάλι προσανατολισμένοι υπερόγκοι, και πως θα συλλάβουμε τα δύο δυνατά πρόσημα της ορίζουσας; Έχουμε φτάσει πλέον στα όρια των απεικονιστικών μας δυνατοτήτων. Οι 2 και οι 3 διαστάσεις μας έδωσαν τη δυνατότητα να κατλάβουμε ότι οι όγκοι στις 2 και στις 3 διαστάσεις μπορούν να είναι αρνητικοί. Αφήνουμε λοιπόν αυτή τη δυνατότητα των δύο διαφορετικών προσήμων να υπάρχει και σε παραπάνω διαστάσεις και παραμένουμε ευγνόμωνες για το ότι έχουμε τη δυνατότητα να αντιλαμβανόμαστε 3 διαστάσεις, ώστε να μπορούμε να κατανοήσουμε το πρόσημο των επιφανειών και να μπορούμε να κάνουμε και το βήμα από το 2 στο 3. Πέραν αυτού μπορούμε να αντιμετωπίζουμε την ορίζουσα ως τον ορισμό του όγκου σε οποιεσδήποτε διαστάσεις.

Ας επιστρέψουμε πίσω στις βολικές δύο διαστάσεις. Περιγράψαμε την ορίζουσα ενός πίνακα ως την ποσοστιαία μεταβολή της επιφάνειας (του όγκου των 2-διαστάσεων) του τετραγώνου των μοναδιαίων διανυσμάτων, όταν αυτά μετασχηματιστούν υπό τη δράση του πίνακα. Αν τα αρχικά διανύσματα, όμως, δεν ήταν τα μοναδιαία ορθογώνια διανύσματα; Η γραμμική δράση των πινάκων δεν θα πρέπει να μας αφήνει καμμιά αμφιβολία, ότι και πάλι η ορίζουσα θα μετράει τον λόγο της επιφάνειας των μετασχηματισμένων διανυσμάτων σε σχέση με αυτή των αρχικών. Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά. Έστω τα διανύσματα $\vec{g}_1 = (x_1, y_1), \vec{g}_2 = (x_2, y_2)$ και ο πίνακας $\mathbf{G}$. Η δράση του πίνακα $\mathbf{G}$ στα διανύσματα αυτά μπορεί να υπολογιστεί μέσω των δράσεων του $\mathbf{G}$ στα μοναδιαία $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}\,'_1 &= \mathbf{G}(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) = x_1\mathbf{G}\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{G}\mathbf{e}_2 = x_1\mathbf{e}\,'_1 + y_1\mathbf{e}\,'_2\ , \\ \mathbf{g}\,'_2 &= \mathbf{G}(x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) = x_2\mathbf{G}\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{G}\mathbf{e}_2 = x_2\mathbf{e}\,'_1 + y_2\mathbf{e}\,'_2\ . \end{aligned}$$

Η επιφάνεια του νέου χωρίου, αυτού που σχηματίζουν τα $\mathbf{g}\,'_1, \mathbf{g}\,'_2$ θα είναι

$$\mathcal{E}' = |\vec{g}\,'_1 \times \vec{g}\,'_2| = |(x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{e}\,'_1 \times \vec{e}\,'_2|\ ,$$

όπου στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε τον μηδενισμό των εξωτερικών γινομένων $\vec{e}\,'_1 \times \vec{e}\,'_1 = \vec{e}\,'_2 \times \vec{e}\,'_2$ και την αντισυμμετρία των $\vec{e}\,'_1 \times \vec{e}\,'_2 = -\vec{e}\,'_2 \times \vec{e}\,'_1$. Αντίστοιχα η επιφάνεια του αρχικού χωρίου είναι

$$\mathcal{E}_0 \ = \ |(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) \times (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2)|$$

[68]Στο κεφάλαιο 1 γράψαμε μια έκφραση που δίνει το εξωτερικό γινόμενο δύο τρισδιάστατων διανυσμάτων χωρίς να το εξηγήσουμε. Ακριβώς αυτή τη φόρμουλα χρησιμοποιήσαμε εδώ για να υπολογίσουμε το εξωτερικό γινόμενο $(1, 2, 0) \times (2, 0, -1)$.

$$= \; |(x_1y_2 - y_1x_2)\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \; .$$

Με άλλα λόγια ο λόγος των δύο επιφανειών είναι

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}_0} = \frac{|\vec{e}\,'_1 \times \vec{e}\,'_2|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

το οποίο δείξαμε προηγουμένως πως δεν είναι άλλο από την ορίζουσα του πίνακα **G**.[69]

3.10.1 Υπολογισμός ορίζουσας και ο $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots}$

Ας ξεκινήσουμε με την παρατήρηση ότι η ορίζουσα ενός πίνακα 2×2 είναι ένα άθροισμα γινομένων ζευγαριών συγκεκριμένων στοιχείων του πίνακα.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^{(2\times2)}) &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \\ &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \; . \end{aligned}$$

Όμοια και για πίνακα 3×3: είναι ένα άθροισμα γινομένων τριάδων συγκεκριμένων στοιχείων του πίνακα.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^{(3\times3)}) &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} \; . \end{aligned}$$

Μάλιστα, το κάθε τέτοιο ζευγάρι, ή τριάδα, αποτελείται από στοιχεία που βρίσκονται *όλα* σε διαφορετικές γραμμές και στήλες του πίνακα (όλοι οι πρώτοι δείκτες είναι διαφορετικοί και όλοι οι δεύτεροι δείκτες είναι διαφορετικοί). Τέλος αξίζει να προσέξει κανείς ότι όλα τα γινόμενα με διαφορετικούς πρώτους και διαφορετικούς δεύτερους δείκτες είναι γραμμένα· δεν έχει μείνει κανένα τέτοιο γινόμενο που να μην συμμετέχει στην ορίζουσα. Αυτή είναι, λοιπόν, η συνταγή γραφής της ορίζουσας οποιουδήπτε τετραγωνικού πίνακα. Το μοναδικό που ακόμη δεν έχουμε ορίσει είναι αν το γινόμενο θα συμμετέχει με "$+$" ή με "$-$" πρόσημο.

Πριν προχωρήσουμε, ας κάνουμε ένα γρήγορο μέτρημα. Θα μας διευκολύνει να φανταστούμε τον πίνακα ως μια σκακιέρα διάστασης $N \times N$ και N πύργους τοποθετημένους σε τετράγωνα έτσι ώστε κανένας να μην απειλεί κανέναν. Αυτή η συνθήκη

[69]Στην παραπάνω απόδειξη, αγνοήσαμε το πρόσημο των επιφανειών και της ορίζουσας γιατί είχαμε διανύσματα του δισδιάστατου χώρου, τα οποία τα χειριστήκαμε ως τρισδιάστατα διανύσματα προκειμένου να γράψουμε τις επιφάνειες ως εξωτερικά γινόμενα. Έτσι όμως δεν θα είχαμε το δικαίωμα να διαιρέσουμε διανύσματα (εξωτερικά γινόμενα). Δεδομένου όμως πως και τα δύο εξωτερικά γινόμενα (και του αρχικού και του τελικού χωρίου) μπορούν να γραφούν ως διανύσματα κάθετα στο εκάστοτε ζευγάρι του δισδιάστατου χώρου, μπορεί κανείς να διαιρέσει μεταξύ τους τις συντεταγμένες των εξωτερικών γινομένων στον κάθετο άξονα. Οι συντεταγμένες αυτές μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές και ο λόγος τους έχει ακριβώς το πρόσημο της ορίζουσας του πίνακα μετασχηματισμού.

ισορροπίας είναι ισοδύναμο με το να είναι κάθε πύργος σε διαφορετική γραμμή και στήλη με κάθε άλλο. Οι πύργοι αντιπροσωπεύουν τα δυνατά στοιχεία του πίνακα που συναπαρτίζουν κάθε γινόμενο από το οποίο συνίσταται η ορίζουσα. Πόσα τέτοια γινόμενα υπάρχουν; Όσες και οι δυνατές θέσεις ισορροπίας των πύργων: Για να φτιάξω μια τέτοια χωροθέτηση πύργων αρκεί να βάλω τον πρώτο πύργο σε κάποια από τα N τετράγωνα της 1ης γραμμής. Για τον 2ο πύργο που θα τοποθετήσω στη 2η γραμμή έχω $N-1$ δυνατές επιλογές (πρέπει να αποφύγω τη στήλη του 1ου πύργου). Ομοίως για τον 3ο πύργο στην 3η γραμμή έχω $N-2$ δυνατές επιλογές κοκ. Συνολικά οι δυνατές θέσεις είναι

$$N \times (N-1) \times (N-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = N! \,.$$

Ας ξεκινήσουμε οργανωμένα μα την πλέον τακτοποιημένη θέση των πύργων. Ο 1ος στην ακραία διαγώνια θέση της σκακιέρας (1η γραμμή και 1η στήλη), ο 2ος στη 2η διαγώνια θέση (2η γραμμή και 2η στήλη, κοντά στον πρώτο) κοκ. Το αντίστοιχο γινόμενο στοιχείων του πίνακα θα είναι το

$$A_{11}A_{22}A_{33}\cdots A_{N-1,N-1}A_{N,N} \,.$$

Για να λάβουμε όλες τις δυνατές θέσεις πύργων και επομένως όλα τα δυνατά γινόμενα N στοιχείων του πίνακα στην ορίζουσα, αρκεί να εναλλάξουμε τις στήλες σε δύο πύργους σε δύο οποιεσδήποτε γραμμές. Σε κάθε τέτοια εναλλαγή αλλάζουμε και το πρόσημο του γινομένου και συνεχίζουμε μέχρι να λάβουμε όλες τις $N!$ δυνατές θέσεις-γινόμενα. Αυτή είναι η ορίζουσα περιγραφικά.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε μια έκφραση η οποία να υλοποιεί αυτή την κατασκευή θα δημιουργήσουμε ένα αντικείμενο με πολλούς δείκτες: τον *πλήρως αντισυμμετρικό ταυνστή N-τάξης*.

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots} \,,$$

όπου το πλήθος των δεικτών είναι N και ο κάθε δείκτης παίρνει κάποια ακέραια τιμή, από 1 ως N. Ορίζουμε το αντικείμενο αυτό να έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Οποτεδήποτε δύο δείκτες αλλάξουν μεταξύ τους θέση το αντικείμενο αυτό αλλάζει πρόσημο (για το λόγο αυτό ονομάζεται πλήρως αντισυμμετρικός).
2. Οποτεδήποτε δύο τουλάχιστον δείκτες είναι ίδιοι το αντικείμενο αυτό λαμβάνει την τιμή 0 (αυτό, αν το καλοσκεφθείτε είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης).
3. Η τιμή του
$$\epsilon_{123\ldots N} = 1 \ .$$

Οι 3 αυτές οδηγίες είναι αρκετές για να καθοριστεί πλήρως το αντικείμενο. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{12} &= 1 \ , \\
\epsilon_{21} &= -1 \ , \\
\epsilon_{22} &= 0 \\
\epsilon_{231} &= 1 \ , \text{ αφού } 1,2,3 \to 2,1,3 \to 2,3,1 \ , \\
\epsilon_{2124} &= 0 \ , \\
\epsilon_{2134} &= -1 \ , \text{ αφού } 1,2,3,4 \to 2,1,3,4 \ .
\end{aligned}$$

Μέσω του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή[70] τάξης N, μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη η οποία να οδηγεί στην ορίζουσα ενός πίνακα:

$$\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma} \cdots A_{N\omega} \ .$$[71]

Προσέξτε ότι η αθροιστική σύμβαση ισχύει για όλους τους δείκτες τους ϵ και το γινόμενο που εμφανίζεται στη συνέχεια είναι ένα γινόμενο N στοιχείων του πίνακα που το καθένα βρίσκεται σε διαφορετική γραμμή (1ος δείκτης) και η μη μηδενικότητα του ϵ εξασφαλίζει ότι μόνο αν τα στοιχεία βρίσκονται και σε διαφορετική στήλη (2ος δείκτης) συνεισφέρουν στον υπολογισμό της ορίζουσας. Έτσι από τα N^N γινόμενα που θα έγραφε κανείς αν ανέπτυσσε πλήρως την αθροιστική σύμβαση, μόνο τα $N!$ από αυτά θα

[70] Το τι είναι τανυστής και γιατί αυτό το αντικείμενο είναι τανυστής δεν θα το εξηγήσουμε περαιτέρω. Θα σημειώσουμε απλώς ότι οι τανυστές είναι γενίκευση των διανυσμάτων και έχουν συγκεκριμένο φυσικο-γεωμετρικό νόημα ανεξαρτήτως του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε για να τους περιγράψουμε. Οι τανυστές τάξης 2 (με δύο δείκτες) αναπαριστώνται με πίνακες διάστασης ίδιας με το χώρο στον οποίο αναφέρονται. Οι τανυστές τάξης μεγαλύτερης του 2 δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες.

[71] Το γεγονός ότι διαλέξαμε τους δείκτες του ϵ να ξεκινούν από το α και να καταλήγουν στο ω δεν θα πρέπει να εκληφθεί ότι ο ϵ έχει 24 δείκτες. Οι δείκτες του ϵ είναι N, όσοι και οι δείκτες των γραμμών και των στηλών του πίνακα **A**.

επιβιώσουν, εξαιτίας της δομής του ϵ, στον υπολογισμό της ορίζουσας. Για να γίνει πιο έκδηλη η οικονομία της γραφής με τους δείκτες θα γράψουμε αναλυτικά την ορίζουσα ενός πίνακα 4ης τάξης:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}^{(4\times4)}) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma}A_{4\delta} \\
&= \epsilon_{1234}A_{11}A_{22}A_{33}A_{44} \\
&+ \epsilon_{1243}A_{11}A_{22}A_{34}A_{43} \\
&+ \epsilon_{1324}A_{11}A_{23}A_{32}A_{44} \\
&+ \epsilon_{1342}A_{11}A_{23}A_{34}A_{42} \\
&+ \epsilon_{1423}A_{11}A_{24}A_{32}A_{43} \\
&+ \epsilon_{1432}A_{11}A_{24}A_{33}A_{42} \\
&+ \epsilon_{2134}A_{12}A_{21}A_{33}A_{44} \\
&+ \epsilon_{2143}A_{12}A_{21}A_{34}A_{43} \\
&+ \epsilon_{2314}A_{12}A_{23}A_{31}A_{44} \\
&+ \epsilon_{2341}A_{12}A_{23}A_{34}A_{41} \\
&+ \epsilon_{2413}A_{12}A_{24}A_{31}A_{43} \\
&+ \epsilon_{2431}A_{12}A_{24}A_{33}A_{41} \\
&+ \epsilon_{3124}A_{13}A_{21}A_{32}A_{44} \\
&+ \epsilon_{3142}A_{13}A_{21}A_{34}A_{42} \\
&+ \epsilon_{3214}A_{13}A_{22}A_{31}A_{44} \\
&+ \epsilon_{3241}A_{13}A_{22}A_{34}A_{41} \\
&+ \epsilon_{3412}A_{13}A_{24}A_{31}A_{42} \\
&+ \epsilon_{3421}A_{13}A_{24}A_{32}A_{41} \\
&+ \epsilon_{4123}A_{14}A_{21}A_{32}A_{43} \\
&+ \epsilon_{4132}A_{14}A_{21}A_{33}A_{42} \\
&+ \epsilon_{4213}A_{14}A_{22}A_{31}A_{43} \\
&+ \epsilon_{4231}A_{14}A_{22}A_{33}A_{41} \\
&+ \epsilon_{4312}A_{14}A_{23}A_{31}A_{42} \\
&+ \epsilon_{4321}A_{14}A_{23}A_{32}A_{41} \\
&= A_{11}A_{22}A_{33}A_{44} \\
&- A_{11}A_{22}A_{34}A_{43} \\
&- A_{11}A_{23}A_{32}A_{44} \\
&+ A_{11}A_{23}A_{34}A_{42} \\
&+ A_{11}A_{24}A_{32}A_{43} \\
&- A_{11}A_{24}A_{33}A_{42}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \; A_{12}A_{21}A_{33}A_{44} \\
&+ \; A_{12}A_{21}A_{34}A_{43} \\
&+ \; A_{12}A_{23}A_{31}A_{44} \\
&- \; A_{12}A_{23}A_{34}A_{41} \\
&- \; A_{12}A_{24}A_{31}A_{43} \\
&+ \; A_{12}A_{24}A_{33}A_{41} \\
&+ \; A_{13}A_{21}A_{32}A_{44} \\
&- \; A_{13}A_{21}A_{34}A_{42} \\
&- \; A_{13}A_{22}A_{31}A_{44} \\
&+ \; A_{13}A_{22}A_{34}A_{41} \\
&+ \; A_{13}A_{24}A_{31}A_{42} \\
&- \; A_{13}A_{24}A_{32}A_{41} \\
&- \; A_{14}A_{21}A_{32}A_{43} \\
&+ \; A_{14}A_{21}A_{33}A_{42} \\
&+ \; A_{14}A_{22}A_{31}A_{43} \\
&- \; A_{14}A_{22}A_{33}A_{41} \\
&- \; A_{14}A_{23}A_{31}A_{42} \\
&+ \; A_{14}A_{23}A_{32}A_{41} \; .
\end{aligned}
$$

Πιθανώς να σας έχει ήδη δημιουργηθεί το ερώτημα: “Πώς γνωρίζουμε το πρόσημο του ϵ με βεβαιότητα, αφού η τελική διάταξη των δεικτών μπορεί να επιτευχθεί με πολλές διαφορετικές εναλλαγές δεικτών. Είναι σίγουρο ότι πάντα θα καταλήξουμε στο συγκεκριμένο πρόσημο;” Για παράδειγμα για να φτάσουμε στη διάταξη 4213 ξεκινώντας από το 1234 μπορούμε να ακολουθήσουμε την ακόλουθη διαδρομή αντιμεταθέσεων

$$1234 \to 1243 \to 1423 \to 4123 \to 4213 \; ,$$

ή την

$$1234 \to 4231 \to 4213 \; .$$

Και στις δύο περιπτώσεις εκτελέσαμε άρτιο πλήθος εναλλαγών δεικτών, οπότε ξεκινώντας από “+” καταλήγουμε σε “+”. Η παρατήρηση περί αρτιότητας ή περιττότητας του πλήθους των αντιμεταθέσεων είναι θεώρημα και αποδεικνύεται. Πάντως, αν δεν ίσχυε αυτό, θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε μια σειρά άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων για να φτάσουμε σε μια διάταξη και να επιστρέψουμε στην αρχική πρότυπη σειρά $123\ldots N$ με περιττό πλήθος αντιμεταθέσεων, οπότε η πρότυπη σειρά θα λάμβανε τελικά αρνητικό πρόσημο!

3.10.2 Ιδιότητες οριζουσών

Τώρα είμαστε σε θέση να διαπιστώσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των οριζουσών.

1. Η εναλλαγή δύο γραμμών σε ένα πίνακα οδηγεί σε αντίθετο πρόσημο την ορίζουσα, αλλά με ίδια απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα έστω ότι αντικαθιστούμε τα στοιχεία της i γραμμής με τα στοιχεία της j γραμμής:

$$A_{ia} \leftrightarrow A_{ja} \text{ για όλα τα } a.$$

Έστω $\tilde{\mathbf{A}}$ ο νέος πίνακας που προκύπτει από αυτή την εναλλαγή, δηλαδή

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{kl} &= A_{kl} \text{ για } k \neq i,\, k \neq j, \\ \tilde{A}_{kl} &= A_{jl} \text{ για } k = i, \\ \tilde{A}_{kl} &= A_{il} \text{ για } k = j. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\mathbf{A}}) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} \tilde{A}_{1\alpha}\tilde{A}_{2\beta}\tilde{A}_{3\gamma}\cdots\tilde{A}_{i\kappa}\cdots\tilde{A}_{j\lambda}\cdots\tilde{A}_{N\omega} \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma}\cdots A_{j\kappa}\cdots A_{i\lambda}\cdots A_{N\omega} \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma}\cdots A_{i\lambda}\cdots A_{j\kappa}\cdots A_{N\omega} \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\ldots\kappa\ldots\omega} A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma}\cdots A_{i\lambda}\cdots A_{j\kappa}\cdots A_{N\omega} \\ &= -\det(\mathbf{A}) \,. \end{aligned}$$

2. Αν προσθέσουμε σε μια γραμμή ενός πίνακα τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής πολλπλασιασμένα με κάποιο συντελεστή, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται. Για παράδειγμα έστω ότι προσθέτουμε στα στοιχεία της i γραμμής τα στοιχεία της j γραμμής πολλαπλασιασμένα με το συντελεστή p:

$$B_{ia} \to B_{ia} + pB_{ja} \text{ για όλα τα } a.$$

Έστω $\tilde{\mathbf{B}}$ ο νέος πίνακας που προκύπτει μετά από αυτή την πρόσθεση, δηλαδή

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{kl} &= B_{kl} \text{ για } k \neq i, \\ \tilde{B}_{kl} &= B_{kl} + pB_{jl} \text{ για } k = i, \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\mathbf{B}}) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} \tilde{B}_{1\alpha}\tilde{B}_{2\beta}\tilde{B}_{3\gamma}\cdots\tilde{B}_{i\kappa}\cdots\tilde{B}_{j\lambda}\cdots\tilde{B}_{N\omega} \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} B_{1\alpha}B_{2\beta}B_{3\gamma}\cdots(B_{i\kappa} + pB_{j\kappa})\cdots B_{j\lambda}\cdots B_{N\omega} \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} B_{1\alpha}B_{2\beta}B_{3\gamma}\cdots B_{i\kappa}\cdots B_{j\lambda}\cdots B_{N\omega} + \\ &\quad\; p\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} B_{1\alpha}B_{2\beta}B_{3\gamma}\cdots B_{j\kappa}\cdots B_{j\lambda}\cdots B_{N\omega} \end{aligned}$$

$$= \det(\mathbf{B}) + p \cdot 0 = \det(\mathbf{B}) \ .$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι δείκτες i και j είναι δοσμένοι (προκαθορισμένοι) αφού στην δοθείσα i γραμμή έχει προστεθεί το p πολλαπλάσιο της j γραμμής. Συνεπώς δεν νοείται η αθροιστική σύμβαση μεταξύ των δεικτών j που εμφανίζονται εις διπλούν. Συνεπώς η έκφραση στην προτελευταία γραμμή είναι ταυτοτικά μηδέν, αφού τα στοιχεία του πίνακα $B_{j\kappa}B_{j\lambda}$ επί τον έψιλον τανυστή θα έπρεπε να δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα αν ανταλλάσσαμε τα ονόματα των κ και λ, αλλά από την άλλη όταν θα ανταλλάζαμε τη θέση αυτών των δεικτών στον έψιλον αυτός θα άλλαζε πρόσημο:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} B_{j\kappa} B_{j\lambda} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\ldots\kappa\ldots\omega} B_{j\lambda} B_{j\kappa} \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} B_{j\lambda} B_{j\kappa} \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} B_{j\kappa} B_{j\lambda} \ .^{72} \end{aligned}$$

3. Ένας πίνακας (τετραγωνικός) και ο ανάστροφός του έχουν ακριβώς την ίδια ορίζουσα:

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^\top) \ .$$

Ο λόγος είναι απλός. Κάθε γινόμενο στοιχείων του πίνακα $\mathbf{C}^\top$, μαζί με το πρόσημό του, στην ορίζουσα του $\mathbf{C}^\top$, συμπεριλαμβάνεται αυτούσιο στα διάφορα γινόμενα του πίνακα $\mathbf{C}$ που γράφει κανείς για να κατασκευάσει την ορίζουσα του $\mathbf{C}$:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega}(C^\top)_{1\alpha}(C^\top)_{2\beta}(C^\top)_{3\gamma}\cdots(C^\top)_{N\omega} \quad = \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} C_{\alpha 1} C_{\beta 2} C_{\gamma 3} \cdots C_{\omega N} \ .$$

Στην τελευταία έκφραση συμπεριλαμβάνονται όλα τα γινόμενα στοιχείων του πίνακα που ανήκουν σε διαφορετική γραμμή και στήλη με το κατάλληλο πρόσημο εξασφαλισμένο μέσω του έψιλον.

4. Αν ένας πίνακας πολλαπλασιαστεί (συνολικά) με κάποιον αριθμό p, η ορίζουσά του θα αλλάξει σε

$$\det(p\mathbf{D}) = p^N \det(\mathbf{D}) \ ,$$

όπου N η διάσταση του πίνακα. Η σχέση αυτή είναι προφανής αλγεβρικά αν σκεφθεί κανείς ότι όλα τα στοιχεία του πίνακα πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο συντελεστή, οπότε η ορίζουσα που αποτελείται από κάποια συγκεκριμένα γινόμενα N

[72] Στην πρώτη γραμμή αλλάξαμε τις ονομασίες των κ και λ σε λ και κ, αντίστοιχα. Στη δεύτερη γραμμή αντιμεταθέσαμε τους δείκτες λ, κ στον έψιλον, οπότε άλλαξε το πρόσημο. Τέλος στην τελευταία γραμμή απλώς αλλάξαμε στο γινόμενο των δύο στοιχείων του πίνακα $\mathbf{B}$ τη σειρά γραφής τους εφόσον πρόκειται για αριθμούς. Η τελευταία έκφραση στην οποία καταλήξαμε είναι το αντίθετο της αρχικής έκφρασης από την οποία ξεκινήσαμε. Συνεπώς η ποσότητα αυτή είναι ταυτοτικά μηδέν.

στοιχείων του πίνακα θα πολλαπλασιαστεί με τον συντελεστή αυτό στη N-οστή δύναμη. Παράλληλα, αν αναλογιστεί κανείς την γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας ως λόγος όγκων μετασχηματισμένου προς αρχικού χωρίου, τότε ο πολλαπλασιασμός του πίνακα με έναν αριθμό θα έχει ως συνέπεια κάθε διάσταση του χωρίου να πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Κατ’ αναλογία, αν μόνο μια γραμμή (ή στήλη εξαιτίας της ισότητας των οριζουσών δύο ανάστροφων, μεταξύ τους, πινάκων) ενός πίνακα πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό, η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτό.

5. Μια ακόμη ενδιαφέρουσα ιδιότητα, η οποία είναι αρκετά δύσκολο να αποδειχθεί συστηματικά μέσω του ορισμού της ορίζουσας με τον έψιλον, είναι ότι η ορίζουσα γινομένου πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών του:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \ .$$

Κατ’ αρχάς η παρπάνω πρόταση δεν είναι καθόλου τετριμένη· σκεφθείτε πόσο μπερδεμένη υπόθεση είναι η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων και πόσο ακόμη πιο μπερδεμένος είναι ο ορισμός της ορίζουσας. Παρά ταύτα όμως, η παραπάνω πρόταση καθίσταται προφανής αν αναλογιστεί κανείς τη γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας ως λόγος όγκων. Έτσι αν φανταστούμε ότι στα διανύσματα που καθορίζουν τις ακμές ενός παραλληλότοπου (το ανάλογο του τρισδιάστατου παραλληλεπιπέδου στις N διαστάσεις) δρούμε πρώτα με τον **B** και κατόπιν με τον **A**, ο όγκος θα αλλάξει κατά τον παράγοντα $\det(\mathbf{B})$ πρώτα και στη συνέχεια κατά $\det(\mathbf{A})$, δηλαδή

$$\det(\mathbf{AB}) = \frac{V_{\mathbf{AB}}}{V_0} = \frac{V_{\mathbf{AB}}}{V_{\mathbf{B}}} \cdot \frac{V_{\mathbf{B}}}{V_0} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \ .$$

Άμεσο πόρισμα αυτής της πρότασης είναι ότι

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$$

παρά το γεγονός ότι $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Επίσης η ορίζουσα του γινομένου οσονδήποτε πινάκων δεν αλλάζει αν πειράξουμε τη διάταξη των πινάκων και ισούται απλώς με το γινόμενο όλων των οριζουσών.

6. Τέλος υπάρχει επίσης και μια όμορφη σύνδεση μεταξύ της ορίζουσας και των ιδιοτιμών ενός πίνακα: Η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών. Προφανώς αν κάποια ή κάποιες ιδιοτιμές εμφανίζονται σε πολλαπλότητα θα πρέπει στο γινόμενο να συμπεριλάβουμε όλες αυτές τις ίδιες ιδιοτιμές. Η συσχέτιση αυτή γίνετια προφανής αν χρησιμοποιήσει κανείς τον παραλληλότοπο των ιδιοανυσμάτων του πίνακα. Αφού η δράση του πίνακα αλλάζει κάθε ένα από αυτά κατά έναν παράγοντα που ισούται με την ιδιοτιμή του, ο όγκος όλου του αντίστοιχου χωρίου

θα αλλάξει κατά έναν παράγοντα ίσο με το γινόμενο των ιδιοτιμών αφού κάθε διάσταση του χωρίου θα αλλάξει κατά την αντίστοιχη ιδιοτιμή. Στην περίπτωση που τα ιδιοανύσματα είναι λιγότερα από τη διάσταση του πίνακα, το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο παρά το ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε N-διάστατο χωρίο μέσω αυτών. Μια απειροελάχιστη αλλαγή κάποιων στοιχείων του πίνακα θα "σπάσει" την ιδιομορφία του πίνακα να έχει λιγότερα από N ιδιοανύσματα ξεχωρίζοντας κάποια από τα ήδη υπάρχοντα (όπως συζητήσαμε στο εδάφιο για τα ιδιοανύσματα με τον πίνακα $\mathbf{A}'$) σε νέα διαφορετικά μεταξύ τους ιδιοανύσματα. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση μπορεί να φανταστεί κανείς αυτά τα στενόμακρα χωρία να μεγαλώνουν κατά το γινόμενο των ιδιοτιμών.

Θα κλείσουμε το εδάφιο αυτό χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 4×4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

στη 2η γραμμή προσθέσαμε το 2πλάσιο της 1ης
από την 3η γραμμή αφαιρέσαμε την 1η
την 4η γραμμή την αφήσαμε ως έχει

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

εναλλάξαμε την 3η με τη 4η

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5/4 & 11/4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

αφαιρέσαμε από την 3η το 1/4 της 2ης

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5/4 & 11/4 \\ 0 & 0 & 0 & -16/5 \end{vmatrix}$$

αφαιρέσαμε από την 4η τα 4/5 της 3ης

$$= -1 \cdot 4 \cdot (-5/4) \cdot (-16/5) = -16 \ .$$

Καταλήξαμε έτσι σε έναν "τριγωνικό", όπως λέγεται, πίνακα από τον οποίο μπορούμε να διαβάσουμε την ορίζουσα πολλαπλασιάζοντας απλώς τα διαγώνια στοιχεία του. Αυτό ισχύει αφού το μοναδικό στοιχείο της 1ης στήλης είναι το A_{11} οπότε

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma} \cdots A_{N\omega} \\
&= \epsilon_{1\beta\gamma\ldots\omega} A_{11} A_{2\beta} A_{3\gamma} \cdots A_{N\omega} \\
&\text{και αφού το } \beta \text{ δεν μπορεί να είναι 1,} \\
&\text{μένει μόνο το στοιχείο } A_{22} \text{ ως μη μηδενικό της 2ης στήλης} \\
&= \epsilon_{12\gamma\ldots\omega} A_{11} A_{22} A_{3\gamma} \cdots A_{N\omega} \\
&\text{και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο...} \\
&= \epsilon_{123\ldots N} A_{11} A_{22} A_{33} \cdots A_{NN} \\
&= A_{11} A_{22} A_{33} \cdots A_{NN} \ .
\end{aligned}$$

3.10.3 Ιακωβιανή ορίζουσα

Όταν σε κάποιο υπολογισμό ολοκλήρωσης βολεύει η χρήση ενός άλλου συστήματος συντεταγμένων, η σχετική μετατροπή πρέπει να λάβει υπόψη την αλλαγή των επιφανειών ή όγκων που συνεισφέρουν στον υπολογισμό κατά τη χρήση του νέου συστήματος συντεταγμένων. Έτσι αν για παράδειγμα θελήσει να υπολογίσει κανείς ένα διπλό ολοκλήρωμα στο επίπεδο $x-y$ χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες δεν θα πρέπει τυφλά να αλλάξει τη στοιχειώδη επιφάνεια από $dx\ dy$ σε $dr\ d\phi$ αλλά θα πρέπει να φροντίσει να κρατήσει την αντίστοιχη στοιχειώδη επιφάνεια ίδια. Για το λόγο αυτό θα χρειαστεί κανείς την ορίζουσα του μετασχηματισμού από $r-\phi$ σε $x-y$. Για την ακρίβεια θα χρειαστούμε, μιας και μιλάμε για στοιχειώδεις επιφάνειες, τον μετασχηματισμό από $dr, d\phi$ σε dx, dy. Όμως, γνωρίζουμε ότι

$$x = r\cos\phi \ , \ y = r\sin\phi$$

οπότε

$$dx = dr\cos\phi - r\sin\phi\ d\phi \ , \ dy = dr\sin\phi + r\cos\phi\ d\phi \ ,$$

ή με χρήση πινάκων

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix} \ .$$

Γενικώτερα αν θέλει κανείς να περάσει από dx, dy σε νέες συντεταγμένες a, b θα χρειαστεί ο πίνακας

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{pmatrix} \ . \tag{50}$$

Η στοιχειώδης επιφάνεια $dx\ dy$, λοιπόν, μπορεί να αντικατασταθεί με την $dr\ d\phi$ (η γενικώτερα) $da\ db$) πολλαπλασιασμένη όμως με την ορίζουσα του αντίστοιχου μετασχηματισμού **J**. Στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων η *Ιακωβιανή ορίζουσα*, όπως ονομάζεται (η ορίζουσα του *Ιακωβιανού πίνακα* **J** δηλαδή) είναι

$$\det(\mathbf{J}) = r \ ,$$

όπως εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε εκτελώντας τις πράξεις. Επομένως σε κάθε επιφανειακό ολοκλήρωμα που σε καρτεσιανές συντεταγμένες περιλαμβάνει την στοιχειώδη επιφάνεια $dx\ dy$, θα πρέπει η αντίστοιχη επιφάνεια σε πολικές συντεταγμένες να μετατραπεί σε $r\ dr\ d\phi$. Για παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας $R = 1$, σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα γράφαμε

$$V_{\text{ημισφ}} = \int\int dxdy\sqrt{1-x^2-y^2} = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\sqrt{1-x^2-y^2} \ .$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν αλλά με κάποιο σχετικό κόπο. Αν καταφύγουμε όμως σε πολικές συντεταγμένες θα έχουμε

$$V_{\text{ημισφ}} = \int\int r\ dr\ d\phi\ \sqrt{1-r^2} = \int_0^{2\pi} d\phi \int dr\ r\sqrt{1-r^2} \overset{\xi=1-r^2}{=} 2\pi \int_1 0(-d\xi/2)\sqrt{\xi} = 2\pi\frac{1}{3} \ .$$

Εξαιτίας της συμμετρίας που παρουσιάζει η ημισφαιρική επιφάνεια γύρω από τον άξονα z, το δεύτερο ολοκλήρωμα δεν έχει καμία εξάρτηση από τη γωνία ϕ, σε αντίθεση με το δεύτερο ολοκλήρωμα στις καρτεσιανές συντεταγμένες που έχει εξάρτηση και από το x και από το y. Επομένως είναι προτιμότερος ο υπολογισμός σε πολικές συντεταγμένες και γι' αυτό χρειάζεται η η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού. Αν θέλαμε να ξαναϋπολογίσουμε τον όγκο του ημισφαιρίου χρησιμοποιώντας άλλες συντεταγμένες θα γράφαμε

$$\int\int da\ db\ \det(\mathbf{J})\sqrt{1-x(a,b)^2-y(a,b)^2} \ ,$$

όπου a, b οι νέες συντεταγμένες, $x(a,b), y(a,b)$ οι καρτεσιανές συντεταγμένες γραμμένες μέσω των νέων συντεταγμένων a, b και **J** ο πίνακας μετασχηματισμού από τις a, b στις καρτεσιανές της (50). Σε κάθε περίπτωση πάντως θα πρέπει να υπολογιστούν προσεκτικά τα όρια του εκάστοτε ολοκληρώματος.

Η εισαγωγή της ιακωβιανής ορίζουσας στα παραπάνω παραδείγματα, αν και μοιάζει λίγο “ουρανοκατέβατη” δεν είναι διαφορετική από την περίπτωση της αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση σε μία διάσταση. Θυμηθείτε ότι αν θέλουμε να αλλάξουμε[73] τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από x σε ξ γράφουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\ f(x) = \int_{\xi(x_1)}^{\xi(x_2)} d\xi\ \frac{dx}{d\xi}\ f(x(\xi)) \ .$$

[73]Το κάναμε πράγματι στην προηγούμενη παράγραφο!

Ακριβώς το ίδιο κάνουμε όταν έχουμε ένα επιφανειακό (διπλό) ολοκλήρωμα, ή ένα χωρικό (τριπλό) ολοκλήρωμα, ή γενικά ένα N-πλό ολοκλήρωμα. Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι το αντίστοιχο της παραγώγου $dx/d\xi$ στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Η $dx/d\xi$ μας λέει πως συγκρίνεται το dx με το $d\xi$, και αντίστοιχα η Ιακωβιανή ορίζουσα μας πληροφορεί πως συγκρίνεται ο "όγκος" $dx\ dy$ με τον όγκο $dr\ d\phi$.

3.11 Διαγωνιοποίηση πίνακα

Στο παρόν εδάφιο θα αποσυνθέσουμε καταλλήλως έναν πίνακα στα πραγματικά συστατικά του στοιχεία. Το εργαλείο για να εκτελέσουμε αυτή την αποσύνθεση είναι προφανώς η δράση του πίνακα στα ιδιοανύσματά του, αφού όλη η πληροφορία για τον πίνακα κρύβεται σε αυτή τη δράση.[74]

Έστω ο πίνακας $\mathbf{A}$ και $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \ldots, \mathbf{X}^{(N)}$ τα ιδιοανύσματά του με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.[75] Για κάθε τέτοιο ιδιοάνυσμα ισχύει

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{X}^{(j)} \text{ χωρίς την αθροιστική σύμβαση.}$$

Αν συγκεντρώσουμε όλα τα ιδιοανύσματα, ως στήλες, ενός ενιαίου $N \times N$ πίνακα:

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(2)} & \ldots & \mathbf{X}^{(N)} \\ & & & \\ \hline \end{array} \right) ,$$

όπου έχουμε τονίσει το γεγονός ότι τα ιδιοανύσματα έχουν τοποθετηθεί ως στήλες του νέου πίνακα $\mathbf{X}$ σχεδιάζοντας παραλληλόγραμμα γύρω από το κάθε ιδιοάνυσμα. Με τη χρήση δεικτών, ο πίνακας $\mathbf{X}$ γράφεται

$$(\mathbf{X})_{ab} = (\mathbf{X}^{(a)})_b \ .$$

Ας δούμε τη δράση του πίνακα $\mathbf{A}$ στον πίνακα $\mathbf{X}$. Και οι δύο είναι τετραγωνικοί πίνακες $N \times N$, οπότε το αποτέλεσμα θα είναι και πάλι πίνακας $N \times N$. Η πρώτη στήλη του προκύπτοντος αυτού πίνακα θα προέλθει από τον πολλαπλασιασμό ολόκληρου του πίνακα $\mathbf{A}$ με την πρώτη στήλη του $\mathbf{X}$ δηλαδή με τον $\mathbf{X}^{(1)}$. Το ίδιο θα ισχύσει και για όλες τις άλλες στήλες, οπότε

[74] Η πρόταση αυτή είναι απολύτως σωστή, όταν ο πίνακας είναι φυσιολογικός, δηλαδή χαρακτηρίζεται από τόσα ιδιοανύσματα όσες είναι και οι διαστάσεις του. Οι πίνακες που έχουν λιγότερα ιδιοανύσματα από τις διαστάσεις τους είναι κάπως ιδιόμορφοι και τα ιδιοανύσματά τους δεν αρκούν για να τους περιγράψουν πλήρως. Ακόμη και γι' αυτούς πάντως μπορούμε, όπως έχουμε δει, να τους πειράξουμε λίγο ώστε να "διαχωρίσουμε" τα συμπίπτοντα ιδιοανύσματά τους ώστε να τους περιγράψουμε κατά προσέγγιση όπως όλους τους φυσιολογικούς πίνακες.

[75] Τα ιδιοανύσματα αριθμήθηκαν με αυτόν τον τρόπο για να μην δημιουργηθεί σύγχυση μεταξύ της αρίθμησης των ιδιοανυσμάτων και του εκάστοτε στοιχείου του κάθε πίνακα-ιδιοάνυσμα.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \lambda_1 \mathbf{X}^{(1)} & \lambda_2 \mathbf{X}^{(2)} & \cdots & \lambda_N \mathbf{X}^{(N)} \\ & & & \\ \hline \end{array} \right) .$$

Είναι σχετικά εύκολο να διαπιστώσετε ότι ο παραπάνω πίνακας μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(2)} & \cdots & \mathbf{X}^{(N)} \\ & & & \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} .$$

Αρκεί να παρατηρήσετε ότι οποιαδήποτε γραμμή του $\mathbf{X}$ (π.χ. η a) όταν πολλαπλασιαστεί με οποιαδήποτε γραμμή του διαγώνιου πίνακα $\boldsymbol{\Lambda}$ (π.χ. την b), θα έχει ως αποτέλεσμα να πάρουμε στη θέση a, b του νέου πίνακα τη b ιδιοτιμή λ_b (αυτό είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της b στήλης του $\boldsymbol{\Lambda}$) επί το b-οστό στοιχείο της a γραμμής του $\mathbf{X}$. Στη θέση αυτή όμως βρίσκεται το a στοιχείο του b ιδιοανύσματος $\mathbf{X}^{(b)}$. Το γινόμενο λοιπόν που γράψαμε τελικά ως $\mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}$, δεν είναι άλλο από αυτό που θέλαμε να αναπαραστήσουμε: **AX**.

Η αποσύνθεση του **A** έχει επιτευχθεί. Η “καρδιά” του **A** έχει αποκαλυφθεί αφού

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda} .$$

Είναι οι ιδιοτιμές του σε διαγώνια μορφή. Όσο για το “ξεσκέπασμα” της ουσίας του **A**, αυτό το πετυχαίνουν τα ιδιοανύσματα μέσω του σάντουιτς $\mathbf{X}^{-1}\cdots\mathbf{X}$. Γιατί αυτός ο συνδυασμός; Η απάντηση έχει να κάνει με την αλλαγή βάσης διανυσμάτων που πραγματοποιεί ο πίνακας **X**: Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\Psi}$. Αυτό μπορεί να γραφεί μέσω των ιδιοανυσμάτων $\mathbf{X}^{(a)}$, αφού τα ιδιοανύσματα είναι N το πλήθος και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι έχουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\Psi}$, το οποίο αναλύεται ως

$$\boldsymbol{\Psi} = 1 \cdot \mathbf{X}^{(1)} + 2 \cdot \mathbf{X}^{(2)} + \ldots + N \cdot \mathbf{X}^{(N)} .$$

Αυτός ο συνδυασμός μπορεί να γραφεί ως

$$\boldsymbol{\Psi} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(2)} & \cdots & \mathbf{X}^{(N)} \\ & & & \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} = \mathbf{X}\,\Xi . \tag{51}$$

κατ’ αναλογία με το $\mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}$ που κατασκευάσαμε προηγουμένως.[76] Ο μονόστηλος πίνακας Ξ στα δεξιά του **X** είναι η ανάλυση του διανύσματός μας στη βάση των ιδιοανυσμάτων

[76]Αξίζει να σημειώσουμε μια σημαντική διαφορά όμως. Το νέο αντικείμενο $\boldsymbol{\Psi}$ είναι διάνυσμα που αναπαρίσταται ως πίνακας $N \times 1$, σε αντίθεση με τον $\mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}$ πού ήταν πίνακας $N \times N$. Γι’ αυτό και ο πίνακας που πολλαπλασιάζει εδώ τον πίνακα των ιδιοανυσμάτων **X** είναι πίνακας στήλη και όχι πίνακας $N \times N$ όπως ο $\boldsymbol{\Lambda}$.

του **A**. Έχοντας, τώρα, αναλύσει το διάνυσμά μας με τον παραπάνω τρόπο ξέρουμε εύκολα πως θα δράσει ο **A** πάνω του:

$$\mathbf{A}\,\Psi = \mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\Xi = \mathbf{X}\,\Lambda\,\Xi\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας εξ αριστερών, τώρα, την τελευταία έκφραση με τον αντίστροφο του **X** βρίσκουμε

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\,\Psi = \Lambda\,\Xi\,.$$

αν αντικαταστήσουμε και τον Ψ με $\mathbf{X}\,\Xi$ θα έχουμε

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\Xi = \Lambda\,\Xi$$

για οποιοδήποτε διάνυσμα Ξ. Με άλλα λόγια

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \Lambda \tag{52}$$

όπως είδαμε και προηγουμένως. Η παραπάνω σχέση μπορεί να ερμηνευθεί ως ακολούθως: O **X** μας μεταφέρει στη βάση των ιδιοανυσμάτων. Δρώντας ο **A** πάνω τους μας δίνει τα ιδιοανύσματα πολλαπλασιασμένα το καθένα με την ιδιοτιμή του. Τέλος ο $\mathbf{X}^{-1}$ μας επιστρέφει στην αρχική βάση αφήνοντας γυμνή την δράση του **A** στα ιδιοανύσματα, δηλαδή των διαγώνιο πίνακα των ιδιοτιμών.

Η σχέση (53) μπορεί να αναδιατυπωθεί στην

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\,\Lambda\,\mathbf{X}^{-1} \tag{53}$$

αν την πολλαπλασιάσει εξ αριστερών με **X** και εκ δεξιών με $\mathbf{X}^{-1}$. Η καινούργια αυτή μορφή μπορεί να ερμηνευτεί ως πλήρης αποσύνθεση του πίνακα **A** στα συστατικά του. Η δράση του **A** μπορεί να "σπάσει" στα εξής βήματα: Αρχικά δρά ο $\mathbf{X}^{-1}$ σε ένα τυχαίο διάνυσμα προκειμένου να το αναλύσει στη βάση των ιδιοανυσμάτων (συγκρίνετέ το με την 51, όπου το Ξ είναι η ανάλυση του Ψ, $\mathbf{X}^{-1}\Psi$, στη βάση των ιδιοανυσμάτων). Στον προνομιακό αυτό χώρο των ιδιοανυσμάτων ο **A** δρα πολύ απλά μεγαλώνοντας το κάθε ιδιοάνυσμα κατά της ιδιοτιμή του. Τέλος ο **X** επαναφέρει το διαμορφωθέν διάνυσμα στην αρχική βάση.

Ας δούμε και ένα αριθμητικό παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

Τα ιδιοανύσματα και οι ιδιοτιμές του είναι

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\,,\ \lambda_1 = 6 \quad \text{και} \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,,\ \lambda_2 = -1\,.$$

Ο πίνακας $\mathbf{X}$ είναι ο

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

και ο αντίστροφός του, όπως έχουμε μάθει ο

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{(-7)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 5/7 & -2/7 \end{pmatrix} .$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσετε, εκτελώντας τις πράξεις ότι

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 5/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\, \mathbf{\Lambda}\, \mathbf{X}^{-1} .$$

ακόμη πιο σημαντικό όμως είναι να καταλάβουμε το τι συμβαίενι με την αλληλουχία αυτών των πινάκων που αναπαριστούν τα βασικά συστατικά του $\mathbf{A}$. Ο $\mathbf{X}^{-1}$ αναλαμβάνει δρώντας σε ένα διάνυσμα να το ξαναγράψει ως γραμμικό συνδυασμό των δύο ιδιοανυσμάτων $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$. Για παράδειγμα το διάνυσμα

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

γράφεται στη βάση των ιδιοανυσμάτων του $\mathbf{A}$

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 5/7 & -2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} ,$$

δηλαδή,

$$\mathbf{v} = \frac{2}{7}\, \mathbf{X}^{(1)} + \frac{3}{7}\, \mathbf{X}^{(2)} ,$$

γεγονός το οποίο είναι πολύ εύκολο να το διαπσιτώσει κανείς. Η μορφή αυτή είναι πλεονεκτική γιατί η δράση του $\mathbf{A}$ στα ιδιοανύσματα είναι εξαιρετικά απλή. Ο $\mathbf{A}$ δρώντας στο $\mathbf{X}^{(1)}$ θα το μεγαλώσει κατά 6 φόρες (όση είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή) και στο $\mathbf{X}^{(2)}$ θα του αντιστρέψει τη φορά (αφού η ιδιοτιμή είναι -1)· βλ. σχήμα. Στο σημείο αυτό καλό είναι να παρατηρήσει κανείς ότι το $\mathbf{v}$ και το $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{v}$ είναι στην πραγματικότητα το ίδιο διάνυσμα με διαφορετικές συνιστώσες· οι μεν στο αρχικό καρτεσιανό σύστημα, οι δε στο (μη καρτεσιανό) σύστημα των ιδιοανυσμάτων. Αυτό που προκύπτει είναι το μετασχηματισμένο διάνυσμα $\mathbf{v}$. Αν θέλει κανείς το τελικό μετασχηματισμένο διάνυσμα να το "διαβάσει" στο αρχικό καρτεσιανό σύστημα και όχι στη βάση των ιδιοανυσμάτων[77] χρειάζεται να πολλαπλασιάσει με τον πίνακα $\mathbf{X}$ για να αποκρυπτογραφήσει ποιες είναι οι συντεταγμένες του

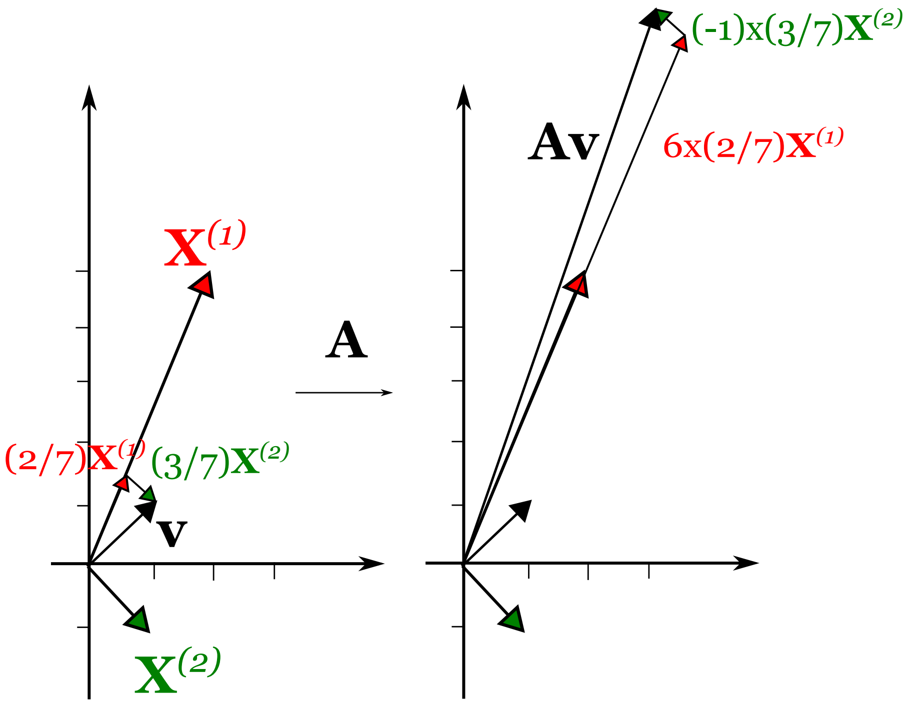
$$6 \times \frac{2}{7}\, \mathbf{X}^{(1)} + (-1) \times \frac{3}{7}\, \mathbf{X}^{(2)} .$$

[77]Για άλλη μια φορά δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε ότι το $\mathbf{A}\, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{v}$ και το $\mathbf{X}\, \mathbf{A}\, \mathbf{X}^{-1}\mathbf{v}$ είναι τα ίδια διανύσματα, το πρώτο στη βάση των ιδιοανυσμάτων και το δεύτερο στο αρχικό καρτεσιανό σύστημα.

Με τον πολλαπλασιασμό αυτόν ξαναγράφει κανείς κατ' ουσίαν τις συντεταγμένες των $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$:

$$6 \times \frac{2}{7}\, \mathbf{X}^{(1)} + (-1) \times \frac{3}{7}\, \mathbf{X}^{(2)} = \frac{12}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63/7 \\ 21/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Πράγματι αυτή είναι η δράση του **A** στο **v**!



Σχήμα 32: Στο σχήμα έχει απεικονιστεί το διάνυσμα **v**, η ανάλυσή του στα ιδιοανύσματα και η δράση του **A** στις συνιστώσες του **v** στη βάση των ιδιοανυσμάτων.

3.12 Ο χώρος των πινάκων - Θεώρημα των Cayley-Hamilton

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο των διανυσμάτων με μια καταπληκτική παρατήρηση του Cayley[78] το 1858.

Προτού ακολουθήσουμε τα χνάρια του Cayley ας αναλογιστούμε πόσα ανεξάρτητα στοιχεία έχει ένας τετραγωνικός πίνακας. Η απάντηση είναι προφανής: όσα και τα στοιχεία του, N^2, αφού κάθε φορά που αλλάζουμε ένα στοιχείο ενός πίνακα λαμβάνουμε έναν εντελώς καινούργιο πίνακα. Από την άλλη πλευρά συνειδητοποιήσαμε ότι

[78] Ο Arthur Cayley [1821-1895], βρετανός αλγεβριστής και καθηγητής στο Cambridge, διατύπωσε για πρώτη φορά το φερώνυμο θεώρημα αποδεικνύοντάς το για πίνακες διάστασης 2 και 3. Ο Hamilton είχε οδηγηθεί νωρίτερα στο θεώρημα μέσω των quaternions, που είχε ο ίδιος κατασκευάσει ως επέκταση των μιγαδικών αριθμών. Η γενική απόδειξη δόθηκε από τον Frobenius το 1878.

τα συστατικά ενός πίνακα είναι τα ιδιοανύσματα και οι ιδιοτιμές του και αυτά είναι N. Μήπως αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας κουβαλάει και άχρηστη πληροφορία μέσα στην πληθώρα των στοιχείων του; Αν μας ενδιαφέρει αποκλειστικά η δράση του **A** και των συναρτήσεων αυτού, π.χ. του $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3$ κοκ., η απάντηση είναι ότι μόνο N στοιχεία (ή συνδυασμός στοιχείων) του πίανακα εμπεριέχουν κάθε ουσιαστική πληροφορία για τον πίνακα.

Ας πάρουμε για παράδειγμα το τετράγωνο ενός 2×2 πίνακα, του

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Θα είναι

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb + d^2 & . \end{pmatrix}$$

Αναγνωρίζοντας στο συνδυασμό $(a + d)$ το ίχνος του πίνακα **A** μπορούμε να ξαναγράψουμε το τελικό αποτέλεσμα ως

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} a(a+d) + (bc - ad) & b(a+d) \\ c(a+d)c & d(a+d) + (cb - ad) \end{pmatrix} \\ &= (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (\det \mathbf{A}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})\ \mathbf{A} - (\det \mathbf{A})\ \mathbf{I}\ . \end{aligned} \tag{54}$$

Αυτή είναι η γραμμική συνάρτηση των **A** και **I** μέσω της οποίας μπορεί κανείς να ξαναγράψει το τετράγωνο ενός πίνακα 2×2. Αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} &= [(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})\ \mathbf{A} - (\det \mathbf{A})\ \mathbf{I}]\ \mathbf{A} \\ &= (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})\ \mathbf{A}^2 - (\det \mathbf{A})\ \mathbf{A} \\ &= (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})\,[(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})\ \mathbf{A} - (\det \mathbf{A})\ \mathbf{I}] - (\det \mathbf{A})\mathbf{A} \\ &= \left[(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})^2 - \det \mathbf{A}\right]\ \mathbf{A} - (\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})(\det \mathbf{A})\ \mathbf{I}\ . \end{aligned}$$

Ομοίως μπορεί κανείς να γράψει κάθε δύναμη του **A** ως γραμμικό συνδυασμό του ίδιου του **A** και του μοναδιαίου πίνακα **I**. Οι δε συντελεστές θα είναι πολυώνυμα της ορίζουσας και του ίχνους του πίνακα.

Αν προσέξει κανείς προσεκτικά το πολυώνυμο 2ου βαθμού του **A** της σχέσης 54 θα διαπιστώσει ότι πρόκειται για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που χρησιμοποιεί κανείς για να βρει τις ιδιοτιμές ενός πίνακα:

$$0 = P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}) + (\det \mathbf{A}).$$

Ακριβώς το ίδιο πολυώνυμο ικανοποιεί και ο ίδιος ο πίνακας **A**:

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}) + (\det \mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}\ ,$$

όπου η μοναδική διαφοροποίηση από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(\lambda)$ είναι η μετατροπή του σταθερού συντελεστή σε πίνακα, μέσω της χρήσης του ταυτοτικού πίνακα, και του 0 με τον μηδενικό πίνακα.

Η διατύπωση του θεωρήματος Cayley-Hamilton είναι ότι ισχύει ως ταυτότητα η σχέση

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

για κάθε τετραγωνικό πίνακα $\mathbf{A}$, οποιασδήποτε διάστασης, όπου P είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που ικανοποιούν οι ιδιοτιμές του πίνακα. Προφανώς το πολυώνυμο αυτό είναι βαθμού N και μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε όλες τις δυνάμεις από N και πάνω του πίνακα $\mathbf{A}$ ως γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων $\mathbf{A}^{N-1}, \mathbf{A}^{N-2}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{I}$.

Βασικά συμπεράσματα:

1. Οι πίνακες έχουν συγκεκριμένες διαστάσεις $N \times M$, αποτελούμενοι από $N \cdot M$ στοιχεία. Για να προσθέτονται δύο πίνακες, ένα προς ένα τα αντίστοιχα στοιχεία τους, πρέπει οι πίνακες να έχουν τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις. Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο πίνακες πρέπει το πλήθος των στηλών του εξ αριστερών να ισούται με το πλήθος γραμμών του εκ δεξιών

$$\mathbf{A}^{N \times M} \mathbf{B}^{M \times K}.$$

2. Η πράξη του πολλαπλασιασμού επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας ένα προς ένα όλα τα στοιχεία μιας γραμμής του αριστερού πίνακα με όλα τα στοιχεία μιας στήλης του δεξιού πίνακα (γι' αυτό θα πρέπει να συμπίπτουν το πλήθος των στηλών του αριστερού με το πλήθος των γραμμών του δεξιού). Συμβολικά γράφουμε

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{A})_{ik} (\mathbf{B})_{kj}$$

με χρήση της αθροιστικής σύμβασης του Einstein, σύμφωνα με την οποία στην παραπάνω σχέση πρέπει να γίνει άθροιση σε όλες τις τιμές του δείκτη k.

3. Στο συμβολισμό $(\mathbf{A})_{ik}$ ο i δείκτης δηλώνει γραμμή και ο k στήλη του πίνακα $\mathbf{A}$.

4. Ένας πίνακας δρώντας σε ένα διάνυσμα (πίνακα στήλη) το μετασχηματίζει σε ένα άλλο διάνυσμα με διαφορετικό εν γένει μήκος (μέτρο) και κατεύθυνση.

5. Κάθε πίνακα πίνακας χαρακτηρίζεται από τα ιδιοανύσματά του πάνω στα οποία δρα με τέτοιο τρόπο ώστε να μην αλλάζει την κατεύθυνσή τους

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \lambda\,\mathbf{X}$$

όπου λ κάποιος αριθμός (η ιδιοτιμή του αντίστοιχου ιδιοανύσματος) που μας δηλώνει πόσο μεγαλώνει ή μικραίνει (ή αλλάζει κατεύθυνση αν $\lambda < 0$) το ιδιοάνυσμα μετά τη δράση του πίνακα.

6. Η διαδικασία εύρεσης των ιδιοανυσμάτων είναι

    - Λύνουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
    $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \, .$$
    - Στη συνέχεια για κάθε μια από τις ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου βρίσκουμε το διάνυσμα που έχει την ιδιότητα
    $$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0} \, .$$
    Δεδομένου ότι η ορίζουσα του αριστερού πίνακα είναι 0, δεν περιμένουμε να βρούμε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές για τις συνιστώσες του ιδιοανύσματος. Το ιδιοάνυσμα θα εξαρτάται από μια (ή περισσότερες) παραμέτρους. Πληροφορία μπορούμε να έχουμε για την κατεύθυνσή του αλλά όχι για το ίδιο το διάνυσμα.
    - Το πλήθος των ιδιοανυσμάτων είναι συνήθως όση η διάσταση του πίνακα. Ενδέχεται, όμως, αν κάποια ιδιοτιμή εμφανίζεται σε κάποια πολλαπλότητα, τα ιδιοανύσματα να είναι λιγότερα.

7. Υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά νούμερα σε ένα πίνακα που είναι αναλλοίωτα σε αλλαγή βάσης του πίνακα. Το ίχνος του
$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = A_{ii}$$
και η ορίζουσά του
$$\det \mathbf{A} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma} \cdots A_{N\omega}$$
όπου $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega}$ ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τάξης N όπου N το πλήθος των δεικτών του. Το πρώτο αντικείμενο (το άθροισμα των διαγωνίων του) είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $N \times 1$ και $1 \times N$ από τα οποία είναι δυνατό να ανακτασκευάσουμε τον πίνακα (με πολλαπλασιαμό μεταξύ τους) τουλάχιστον ως προς τα διαγώνια στοιχεία του. Το δεύτερο αντικείμενο μετράει την αύξηση (ή ελλάτωση) του όγκου ενός οποιουδήποτε χωρίου κατά τον μετασχηματισμό του υπό τη δράση του πίνακα.

8. Οι ορίζουσες ενός πίνακα διέπονται από κάποιες ιδιότητες.

    - Η ορίζουσα δεν αλλάζει αν αναστρέψουμε έναν πίνακα: $\det(\mathbf{A}^{\top}) = \det(\mathbf{A})$.
    - Η ορίζουσα δεν αλλάζει αν προσθέσουμε σε μια γραμμή (ή στήλη του πίνακα) μια άλλη γραμμή (ή στήλη) πολλαπλασιασμένη με κάποιον συντελεστή.

- Η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές (ή δύο στήλες).
- Αν ο πίνακας πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό, η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτό υψωμένο στη διάσταση του πίνακα.
- Η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα.
- Η ορίζουσα γινομένου ισούται με το γινόμενο των οριζουσών.

9. Οι πίνακες μπορούν να σπάσουν σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος ως

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top}{2} + \frac{\mathbf{B} - \mathbf{B}^\top}{2}$$

όπου για ένα συμμετρικό πίνακα ισχύει $S_{ij} = S_{ji}$, ενώ για έναν αντισυμμετρικό $A_{ij} = -A_{ji}$. Προφανώς τα διαγώνια στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδενικά.

10. Ένας συμμετρικός πίνακας έχει ορθογώνια, μεταξύ τους ιδιοανύσματα, εφόσον οι ιδιοτιμές τους είναι διαφορετικές.

11. Ένας οποιοσδήποτε πίνακας με N διαφορετικά ιδιοανύσματα διαγωνιοποιείται ως ακολούθως

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \Lambda$$

όπου $\mathbf{X}$ ο πίνακας των ιδιοανυσμάτων (οι στήλες του είναι τα ιδιοανύσματα) και $\boldsymbol{\Lambda}$ ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών. Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\,\Lambda\,\mathbf{X}^{-1}$$

ως διαδικασία ανασύνθεσης του πίνακα $\mathbf{A}$.

12. Σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton ένας πίνακας αποτελεί λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\ .$$

Το θεώρημα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε ανώτερες δυνάμεις του πίνακα ως γραμμικό συνδυασμό των κατώτερων $N-1$ δυνάμεων του πίνακα (όπου N η διάστασή του) και του μοναδιαίου.

4 Μιγαδικοί αριθμοί *(ένας φανταστικός κόσμος κατά την εξερεύνηση του πραγματικού)*

4.1 Νέοι αριθμοί

Ποιος αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο είναι ίσος με 2; Με άλλα λόγια λύστε την εξίσωση

$$x^2 = 2 \; .$$

Θα απαντήστε αβίαστα $x = \pm\sqrt{2}$. Στην ενοχλητική ερώτηση: "και ποιος είναι αυτός ο αριθμός", θα απαντήσετε: "ο ρίζα 2, και ο μείον ρίζα 2, ποιος άλλος;" Έχετε αλήθεια αναρωτηθεί κατά πόσον υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός, πόσο πραγματικός είναι; Ο Ίππασος ο Μεταπόντιος πάντως φημολογείται ότι δολοφονήθηκε από τους Πυθαγόρειους όταν αποκάλυψε ότι η ρίζα του 2 δεν είναι ρητός αριθμός, δηλαδή δεν είναι "κανονικός" αριθμός σαν όλα τα κλάσματα ακεραίων. Τι πιο κανονικό έχουν οι ρητοί που το στερείται η ρίζα του 2; Πρώτον οι ρητοί αριθμοί είναι λογικές κατασκευές: μπορείς να πάρεις το 1/5 διαιρώντας τη μονάδα σε 5 ίσα μέρη και στη συνέχεια να πάρεις 7 τέτοια μέρη και να φτιάξεις τον ρητό αριθμό 7/5. Επίσης, μπορεί να δείξει κανείς ότι ανάμεσα σε οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς υπάρχουν οσηδήποτε άλλοι. Για παράδειγμα ανάμεσα στον 277/381 και τον 278/382 υπάρχουν όλοι οι ρητοί αριθμοί:

$$\frac{277 + 278m}{381 + 382m} \; ,$$

με m οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. Αυτό θα έπειθε κάποιον λογικό άνθρωπο ότι όλοι οι αριθμοί είναι ρητοί. Δεν μπορούν να υπάρχουν τρύπες ανάμεσα τους. Μόνον η γεωμετρική απεικόνιση των αριθμών και η απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ απεικονίζεται σε κάποια απόσταση (τη διαγώνιο του τετραγώνου με μήκος 1) αν και δεν είναι ρητός θα δημιουργούσε αμφιβολίες για το κατά πόσο υπάρχουν και άλλοι αριθμοί πέραν των ρητών. Πάντως σύμφωνα με τη διάσημη κλασική (και πολύ όμορφη) απόδειξη ότι η $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αντιλαμβανόμαστε ότι δεν είναι δυνατόν αυτός ο αριθμός να ειπωθεί. Μπορεί να συμβολιστεί (με το περίεργο σύμβολο της ρίζας), αλλά παραμένει ένας πραγματικά απίθανος αριθμός (μαζί με πολλούς άλλους σαν αυτόν, που χωράνε ανάμεσα στους απόλυτα πυκνούς ρητούς αριθμούς). Τον αποδεχόμαστε ως ισάξιο αριθμό με μισή καρδιά... Λέμε ότι επεκτείναμε το σύνολο των ρητών (των "κανονικών" αριθμών) ώστε να χωρέσει και αυτόν τον ακατονόμαστο αριθμό προκειμένου να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση. Και δώσαμε όνομα σε αυτό το σύνολο· τους είπαμε πραγματικούς αριθμούς για να χωρέσουμε και αυτούς που λέγονται και αυτούς που δεν λέγονται.

Τι θα λέγατε τώρα αν σας πρότειναν να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 = -1$$

Στοιχηματίζω ότι τώρα θα είσαστε ανένδοτοι. Αυτή η εξίσωση *δεν* λύνεται. Κάθε αριθμός που θα υψωθεί στο τετράγωνο είναι θετικός (ή μηδέν). Πράγματι, κάθε πραγματικός αριθμός έχει αυτή την ιδιότητα. Γιατί όμως να περιοριστεί κανείς από αυτό το, έτσι κι αλλιώς τεχνητό δημιούργημα, την επέκταση δηλάδή των ρητών σε ένα ευρύτερο σύνολο που δίνει λύσεις σε εξισώσεις σαν της $x^2 = 2$. Γιατί να μην επεκταθούμε κι άλλο εισάγοντας ένα νέο σύμβολο, έναν νέο αριθμό, που να λύνει και αυτή τη νέα εξίσωση; Ας την ονομάσουμε αυτή τη λύση i, λέγοντας ότι $i^2 = -1$. Για να χωρέσει και αυτός ο νέος αριθμός στο εύρος των δραστηριοτήτων μας επεκτείνουμε και άλλο το σύνολο των γνωστών μας αριθμών στους *μιγαδικούς* αριθμούς.

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι αριθμοί που προκύπτουν από το πάντρεμα των πραγματικών αριθμών με πραγματικά πολλαπλάσια της νέας μονάδας, του i. Έτσι θα λέμε ότι ένας αριθμός z ανήκει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$, εφόσον μπορεί να γραφεί ως

$$z = a + ib \ ,$$

όπου a, b πραγματικοί αριθμοί. Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται *πραγματικό μέρος* του z και γράφεται $\Re(z)$, ενώ ο b ονομάζεται *φανταστικό μέρος* του z και γράφεται $\Im(z)$.[79]

4.2 Πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών

Ας δοκιμάσουμε να εκτελέσουμε τις γνωστές μας πράξεις με το νέο αυτό είδος αριθμών. Για την πρόσθεση δεν υπάρχουν και πολλά ενδιαφέροντα πράγματα που μπορούμε να κατασκευάσουμε. Απαιτώντας οι μιγαδικοί αυτοί αριθμοί, όταν είναι πραγματικοί (όταν δηλαδή το φανταστικό τους μέρος είναι μηδέν) να συμπεριφέρονται όπως γνωρίζουμε και όταν είναι καθαρά φανταστικοί να προστίθενται οι συντελεστές της φανταστικής μονάδας, θα πρέπει να προστίθενται ως ακολούθως

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \ ,$$

ή

$$\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2) \text{ και } \Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2) \ .$$

Τα ίδια ισχύουν και για την αφαίρεση αφού για κάθε μιγαδικό αριθμό z μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αντίθετό του:

$$-z = -\Re(z) + i[-\Im(z)]$$

ο οποίος όταν προστεθεί στον z θα οδηγήσει στον μηδενικό μιγαδικό αριθμό

$$0 + 0i$$

[79] Τα σύμβολα $\Re, \Im$ είναι καλλιγραφικές συντομογραφίες των Re, Im, οι οποίες με τη σειρά τους είναι τα αρχικά των Real, Imaginary.

που συμπίπτει με τον πραγματικό αριθμό 0. Μέσω του αντιθέτου μιγαδικού μπορούμε να εκτελέσουμε την αφαίρεση ως μια πρόσθεση:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \ .$$

Τα πράγματα γίνονται πιο ενδιαφέροντα αν προσπαθήσουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς. Πάλι θα πρέπει να ορίσουμε τα πράγματα ώστε

$$(a_1 + i0)(a_2 + i0) = a_1 a_2$$

και

$$(0 + i1)(0 + i1) = i^2 = -1 \ .$$

Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους τα πραγματικά μέρη και πάλι μεταξύ τους τα φανταστικά μέρη; Αν αυτό είναι ο "πολλαπλασιασμός" μιγαδικών αριθμών τότε πάντα θα είχαμε ως αποτέλεσμα πραγματικό αριθμό. Θα χανόταν εντελώς ο πλούτος που μας φέρνουν οι μιγαδικοί αριθμοί. Επίσης αν είχαμε να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό

$$i1 = (1 + i0)(0 + i1)$$

θα απαντούσαμε $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 i^2 = 0$; Θα ήταν χαζό αφού ήδη την φανταστική μονάδα την έχουμε γράψει ως έναν πλήρη μιγαδικό ριθμό με πραγματικό και φανταστικό μέρος, ως $i = 0 + i1 = i1$. Γιατί λοιπόν να μην εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό με τον κλασικό τρόπο που ξέρουμε

$$(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i \\
&= b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i \\
&= a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i \\
&\text{θεωρώντας ότι, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς,} \\
&\text{μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τους αριθμούς, πραγματικούς και φανταστικούς} \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \ .
\end{aligned}$$

Ορίζουμε λοιπόν την πράξη του πολλαπλασιασμού ως ακολούθως

$$\Re(z_1 z_2) = \Re(z_1)\Re(z_2) - \Im(z_1)\Im(z_2 3) \text{ και } \Im(z_1 z_2) = \Re(z_1)\Im(z_2) + \Re(z_2)\Im(z_1) \ .$$

Για την διαίρεση θα χρειαστεί να ορίσουμε ένα πολύ χρήσιμο νέο μιγαδικό κατασκεύασμα, με δεδομένο έναν μιγαδικό: τον *συζυγή* μιγαδικό:

$$\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z) \ ,$$ [80]

δηλαδή τον μιγαδικό αριθμό που έχει ως φανταστικό μέρος το αντίθετο του φανταστικού μέρους του αρχικού μιγαδικού. Το ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του $\bar{z}$ είναι ότι

$$\begin{aligned} z\bar{z} = \bar{z}z &= [\Re(z) + i\Im(z)]\,[\Re(z) - i\Im(z)] \\ &= [\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2 \end{aligned} \tag{55}$$

δηλαδή είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός αυτός είναι το τετράγωνο του *μέτρου* του μιγαδικού αριθμού $|z|$.[81] Μέσω λοιπόν του συζυγούς μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο ενός μιγαδικού αριθμού ως ακολούθως

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$$

ή αλλιώς

$$\frac{1}{z} = \Re(1/z) + i\Im(1/z) = \frac{\Re(z)}{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2} - i\frac{\Im(z)}{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2} \ .$$

Κάπως πολύπλοκο, ε; Μην ξεχνάτε ότι δεν χρειάζεται να το θυμόσαστε, απλώς κάντε την πράξη και εκμεταλλευτείτε τον συζυγή μιγαδικό αριθμό.

Μέσω της προηγούμενης κατασκευής, μπορεί τώρα κανείς να εκτελέσει τη διαίρεση μεταξύ δύο μιγαδικών

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \\ &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \ . \end{aligned}$$

Προφανώς η διαίρεση απαγορεύεται μόνο αν ο παρονομαστής είναι ο μηδενικός αριθμός (με μηδεν πραγματικό και φανταστικό μέρος). Μπορούμε κάλιστα όμως να διαιρέσουμε π.χ. με το i.

4.3 Μιγαδικό πεδίο - Πολική αναπαράσταση ενός μιγαδικού

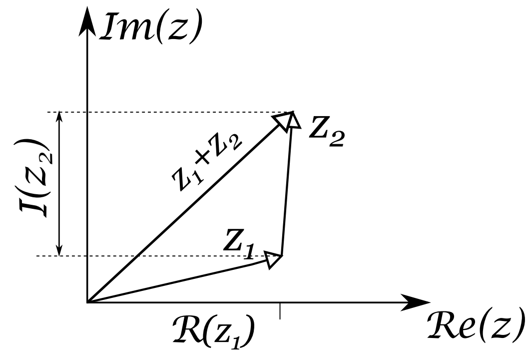
Το γεγονός ότι τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη ενός μιγαδικού αριθμού είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο θυμίζει την αναπαράσταση ενός διανύσματος του

[80] Σε κάποια εγχειρίδια, ο συζυγής μιγαδικός αριθμός συμβολίζεται με $z^\star$.

[81] Θα δούμε λίγο αργότερα γιατί η ποσότητα αυτή ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού αριθμού. Προς το παρόν καταλαβαίνει κανείς ότι όσο μεγαλώνει, κατ' απόλυτη τιμή, και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού τόσο πιο "μεγάλος" είναι ο μιγαδικός αριθμός, αν και στους μιγαδικούς επειδή τα δύο μέρη του είναι μη συγκρίσιμα, δεν υπάρχει διάταξη μεταξύ αυτών. Υπάρχει όμως διάταξη των μέτρων τους.

επιπέδου μέσω των x και y συνιστωσών του. Μπορεί η αναλογία να φαίνεται υπερβολική, αλλά η πραγματική μονάδα 1 και η φανταστική μονάδα i συμπεριφέρονται ως διανύσματα βάσης κατά την κατασκευή του γραμμικού συνδυασμού $a \cdot 1 + b \cdot i$, που ορίζει έναν μιγαδικό αριθμό. Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δισδιάστατο επίπεδο, όπου οι άξονες x και y θα αντικατασταθούν από έναν πραγματικό και έναν φανταστικό άξονα, έτσι ώστε ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός να μπορεί να αναπαρασταθεί στο χώρο αυτό σαν εκείνο το μοναδικό σημείο το οποίο έχει συντεταγμένες (μετρημένες στους δύο αυτούς άξονες) το πραγματικό του και το φανταστικό του μέρος. Σύμφωνα με την διεξοδική ανάλυση που κάναμε στο κεφάλαιο των διανυσμάτων, θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε τον μιγαδικό αυτό αριθμό με το διάνυσμα του δισδιάστατου αυτού χώρου με το διάνυσμα που έχει ως αφετηρία την αρχή των αξόνων (το $0 + 0i = 0$) και πέρας το σημείο που αντιπροσωπεύει τον μιγαδικό.

Η κατασκευή αυτή είναι απόλυτα συμβατή με την πράξη της πρόσθεσης που ορίσαμε παραπάνω, αφού και για τα κλασικά διανύσματα και για τους μιγαδικούς αριθμούς η πρόσθεση επιτυγχάνεται προσθέτοντας τις επί μέρους συνιστώσες αυτών (τις x- και τις y- συνιστώσες για τα διανύσματα, τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη για τους μιγαδικούς). Μπορούμε, λοιπόν, να τοποθετούμε τα διανύσματα των μιγαδικών το ένα μετά το άλλο και να σχεδιάζουμε το διάνυσμα-μιγαδικό που προκύπτει ενώνοντας αφετηρία του πρώτου και πέρας του δεύτερου.



Σχήμα 33: Οι μιγαδικοί προστίθενται όπως και τα διανύσματα του επιπέδου. Στους άξονες έχουν σχεδιαστεί μόνο το πραγματικό μέρος του z_1 και το φανταστικό μέρος του z_2.

Πέραν όμως της βολικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών ως διανύσματα, η γεωμετρική αυτή απεικόνιση μας προϊδεάζει να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για την αναπαράσταση του μιγαδικού. Κατ' αναλογία λοιπόν με τα διανύσματα του επιπέδου μπορούμε χρησιμοποιήσουμε το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος και τη γωνία που σχηματίζει με τον ένα άξονα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$z = \Re(z) + i\Im(z) = (r\cos\phi) + (r\sin\phi)i \;, \tag{56}$$

όπου r το αντίστοιχο μήκος του “διανύσματος”

$$r = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}$$

και

$$\tan\phi = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \ .$$

Προφανώς αν $\Re(z) = 0$ θα πρέπει να θέσουμε ως $\phi = \pm\pi/2$, ανάλογα με το πρόσημο του φανταστικού μέρους. Η γωνία ϕ ονομάζεται *όρισμα* του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται $\arg(z)$. Παρατηρώντας λίγο προσεκτικότερα τη μορφή του r αναγνωρίζουμε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού που ορίσαμε παραπάνω:

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} \ .$$

Η γραφή 56 μπορεί να γραφεί πιο απλά

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|\left(\cos(\arg(z)) + \sin(\arg(z))i\right)$$

και όπως θα δούμε στη συνέχεια μπορεί να απλοποιηθεί ακόμη περισσότερο στην

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\arg(z)} \ .$$

Η γραφή αυτή καθιστά, όπως θα δούμε πολύ απλή τη γραφή των γινομένων μεταξύ δύο μιγαδικών αριθμών και πρωτοπροτάθηκε από τον Euler.

Ας ξεκινήσουμε την ιστορία αυτής της γραφής από τον άρρητο και υπερβατικό[82] αριθμό e που εμφανίζεται στα μαθηματικά και τη φυσική σε τέτοιο βαθμό ώστε να συναγωνίζεται επάξια τον άλλο πασίγνωστο άρρητο και υπερβατικό αριθμό π. Ο αριθμός αυτός, που πήρε το όνομά του από τον μεγάλο μαθηματικό Leonard Euler και μπορεί να οριστεί με πολλούς τρόπους. Ο θεμελιωδέστερος όλων είναι ο ακόλουθος:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ .$$

Ο αριθμός αυτός αιωρείται ανάμεσα στην τάση της άπειρης αυτής δύναμης να στείλει το όριο στο άπειρο λόγω του ότι η βάση είναι μεγαλύτερη της μονάδας και να καταλήξει απλά στη μονάδα δεδομένου ότι η βάση τείνει στη μονάδα. Τελικά ο e καταλήγει να είναι ο αριθμός $2.7182818\ldots$. Είναι σχετικά εύκολο να δειχτεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$ [83]

[82]Υπερβατικοί είναι οι αριθμοί που δεν αποτελούν λύσεις κάποιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές.

όπου k κάποιος φυσικός αριθμός. Ομοίως η πρόταση αυτή επεκτείνεται σε οποιονδήποτε ρητό αριθμό και επομένως αφού μπορώ με ρητούς να πλησιάσω οσοδήποτε έναν πραγματικό άρρητο αριθμό ακόμη και στους αρρήτους. Αν τώρα δοκιμάσει κανείς να υπολογίσει το ανάπτυγμα του γινομένου $(1+x/n)^n$ για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n θα λάβει

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(\frac{x}{n}\right)^p = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{n!}{n^n}\frac{x^n}{n!}\ .$$ [84]

Καθώς ο φυσικός αριθμός n μεγαλώνει μπορεί να δειχθεί ότι η παραπάνω δύναμη αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots \tag{57}$$

και συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό x. Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε το παραπάνω όριο ως τη συνάρτηση e^x:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

και να αντιμετωπίζουμε το e^x, ως τη δυναμοσειρά 57. Πιθανώς να μπείτε στον πειρασμό να θεωρήσετε ότι η ποσότητα e^x ικανοποιεί την προφανή σχέση $e^x e^y = e^{x+y}$. Η αλήθεια είναι ότι την ικανοποιεί, αλλά όχι επειδή πολλαπλασιάζουμε δύο δυνάμεις με ίδια βάση, αλλά επειδή ορίστηκε έτσι η συνάρτηση ώστε

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n \quad {}^{85} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n \\ &= e^x e^y\ . \end{aligned}$$

[83] Αν υπολογίσει κανείς το ακόλουθο όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/k}\right)^{(n/k)k} = e^k$$

αφού $(1+1/c_n)^{c_n}$ τείνει στον e για οποιαδήποτε ακολουθία απειρίζεται (ή πηγαίνει στο $-\infty$).

[84] $\binom{\kappa}{\lambda}$ είναι οι δυωνυμικοί συντελεστές του Νεύτωνα που ισούνται με

$$\binom{\kappa}{\lambda} = \frac{\kappa!}{\lambda!}$$

Ας απελευθερωθούμε τώρα από τα όρια και ας κρατήσουμε στο μυαλό μας τη συνάρτηση e^x ως τη συγκλίνουσα δυναμοσειρά της 57 και ας δοκιμάσουμε στη θέση του x να τοποθετήσουμε έναν καθαρά φανταστικό αριθμό, τον $i\phi$.[86] Θα λάβουμε

$$e^{i\phi} = 1 + \frac{i\phi}{1!} + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} \ldots + \frac{(i\phi)^k}{k!} + \ldots$$

και διαχωρίζοντας τις άρτιες και τις περιττές δυνάμεις του ϕ

$$= \left[1 - \frac{(\phi)^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \frac{(\phi)^{2k}}{(2k)!} + \ldots\right] + i \left[\frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{(\phi)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots\right].$$

Στις δύο αυτές αγκύλες αναγνωρίζει κανείς τις δυναμοσειρές του $\cos\phi$ και $\sin\phi$ αντίστοιχα. Επομένως μπορεί πλέον να γράφει κανείς συνοπτικά τον μιγαδικό αριθμό μέτρου 1, $(\cos\phi + i\sin\phi)$ ως $e^{i\phi}$. Δεδομένης μάλιστα της ιδιότητας $e^x e^y = e^{x+y}$, (που όπως τονίσαμε πηγάζει από τις ιδιότητες των ορίων και μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τη γραφή των δυνάμεων στη δύναμη ενός αρρήτου υψωμένου σε κάποιον αριθμό πέραν των πραγματικών) μπορούμε να γράφουμε χωρίς πολύ σκέψη

$$\begin{aligned} e^{i(\phi+\theta)} &= e^{i\phi}e^{i\theta} \Rightarrow \\ & \cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta) = (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ & \cos(\phi+\theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \text{ και } \sin(\phi+\theta) = \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta\ . \end{aligned}$$

Οι τριγωνομετρικές σχέσεις που μας παίδευαν να αποδείξουμε γεωμετρικά, προκύπτουν αβίαστα μέσω των μιγαδικών αριθμών! Πως να αγνοήσει κανείς μια τέτοια ευκολία...

Τώρα μπορούμε να εκτελούμε πολλαπλασιασμούς μιγαδικών ως εξής:

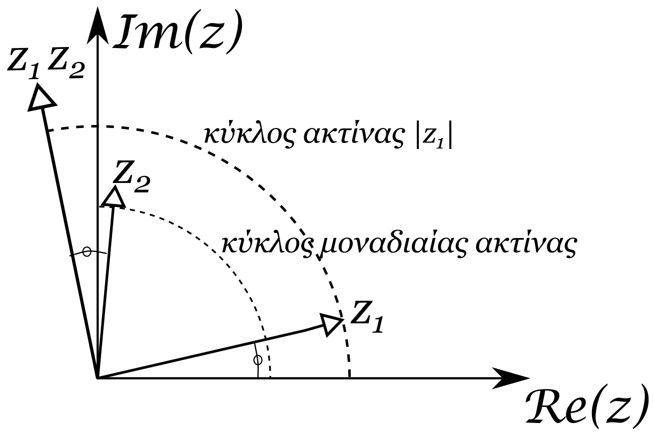
$$z_1 z_2 = |z_1|\ |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)},$$

τα μέτρα πολλαπλασιάζονται και τα ορίσματα (οι γωνίες) προστίθενται.

Αν επανέλθουμε στην αναπαράσταση των μιγαδικών ως διανύσματα τότε ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών που είδαμε παραπάνω δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως πολλαπλασιασμός διανυσμάτων του επιπέδου ώστε να οδηγήσει σε κάποιο νέο διάνυσμα; Αν θυμόσαστε είχαμε αποκλείσει μια τέτοια δυνατότητα, όταν μιλούσαμε για τον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων. Ο λόγος είναι ότι θέλαμε να φτιάξουμε αντικείμενα (βαθμωτές ή διανυσματικές ποσότητες) που να έχουν νόημα ανεξαρτήτως του συστήματος των συντεταγμένων που θα χρησιμοποιούσαμε. Στην περίπτωση των μιγαδικών

[85]Όπως σημειώσαμε και στην υποσημείωση 5, η ακολουθία $(1+1/c_n)^{c_n}$ για $c_n = (\frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2})^{-1}$ τείνει στο e, οπότε το παραπάνω όριο είναι το ίδιο με το $(1+1/c_n)^{c_n(n/c_n)}$, που καταλήγει να είναι αυτό της 1ης γραμμής στην εξίσωση.

[86]Στην πραγματικότητα θα μάθετε ότι αυτή η δυναμοσειρά κρύβει τεράστιες δυνατότητες και είναι ικανή να φιλοξενήσει πολύ διαφορετικές ποσότητες, όπως πίνακες, ή τελεστές.



Σχήμα 34: Οι μιγαδικοί πολλαπλασιάζονται με πολλαπλασιασμό των μέτρων τους και πρόσθεση των ορισμάτων τους.

αριθμών, όμως, ο άξονας των πραγματικών και των φανταστικών δεν είναι ισοδύναμοι γι' αυτό και είναι ακλόνητοι. Και στα απλά διανύσματα θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει ένα γινόμενο διανυσμάτων της μορφής

$$\vec{v}_1 \odot \vec{v}_2 = (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

κατ' αναλογία με τους μιγαδικούς αριθμούς, αλλά αυτό το νέο διάνυσμα δεν θα είχε την ίδια σχέση με τα αρχικά διανύσματα, ανεξαρτήτως πως θα ήταν αυτά τοποθετημένα στο επίπεδο. Για παράδειγμα

$$(1, 0) \odot (1, 0) = (1, 0)$$

αλλά

$$(0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0) \ .$$

Αυτός είναι ό λόγος που δεν ορίσαμε ένα τέτοιο διανυσματικό γινόμενο στο 1ο Κεφάλαιο. Θα δούμε αργότερα ότι θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε, ως προς τον πολλαπλασιασμό τους, τους μιγαδικούς αριθμούς ως πίνακες 2×2.

Ας εκμεταλλευτούμε την πολική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών για να εκτελέσουμε μερικούς ακόμη χρήσιμους υπολογισμούς.

1. Πώς θα γράφαμε σε πολική μορφή τον συζυγή ενός μιγαδικού; Αφού ο συζυγής έχει αντίθετο φανταστικό μέρος από τον αρχικό αριθμό, θα πρέπει το όρισμά του να είναι αντίθετο του ορίσματος του αρχικού:

   $$z = |z| e^{i\theta} \to \bar{z} = |z| e^{-i\theta}$$

   έτσι ώστε

   $$z\bar{z} = |z| e^{i\theta} |z| e^{-i\theta} = |z|^2 e^{i0} = |z|^2 e^0 = |z|^2 \ .$$

2. Πως θα υπολογίζαμε τη δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού, π.χ. z^s; Απλά

$$z^s = |z|^s e^{is \arg z}$$

και αν η δύναμη είναι και αυτή μγαδικός αριθμός; Κανένα πρόβλημα με την πολική αναπαράσταση.

$$z^w = |z|^w e^{i \arg z w} \ .$$

Εδώ χρειάζεται λίγη περίσκεψη αν ο w είναι μιγαδικός. Το μεν $e^{i(\arg z)w}$ εύκολα υπολογίζεται αναλύοντας τον w σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$e^{i \arg z w} = e^{i(\arg z)(\Re(w)+i\Im(w))} = e^{i(arg z)\Re(w)} e^{-(\arg z)\Im(w)} \ .$$

Όσο για τον πραγματικό $|z|$ υψωμένο σε μιγαδική δύναμη θα γράφαμε

$$\begin{aligned} |z|^w &= (e^{\log|z|})^w \text{ [87]} \\ &= e^{\log|z| w} \\ &= e^{\log|z| \cos(\arg w)} e^{i \log|z| \sin(\arg w)} \\ &= |z|^{\cos(\arg w)} e^{i \log|z| \sin(\arg w)} \ . \end{aligned}$$

Μαζεύοντας τα διάφορα κομμάτια θα λάβουμε την ακόλουθη έκφραση "Φράνκεσταϊν"

$$z^w = |z|^{\cos(\arg w)} e^{-(\arg z)\Im(w)} e^{i[(\arg z)\Re(w)+\log|z| \sin(\arg w)]} \ .$$

Για παράδειγμα θα μπορούσε να υπολογίσει κανείς τον ενδιαφέροντα συνδυασμό i^i:

$$i^i = e^{i\pi/2i} = e^{-\pi/2} \ .$$

Επιβεβαιώστε ότι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα θα πέρνατε αν καταφεύγατε στον προηγούμενο θηριώδη τύπο.

Ίσως να έχετε ήδη αναλογιστεί ότι σε όλους αυτούς τους υπολογισμούς ελοχεύει ένα σκοτεινό πρόβλημα. Λόγω της περιοδικότητας των cos και sin αυτά δεν αλλάζουν αν οι γωνίες αυτών (τα ορίσματα) αντικατασταθούν με $\arg z + 2k\pi$. Όπου κατά τις πράξεις προκύπτουν πολλαπλασιασμοί με τα ορίσματα ενδεχομένως να μην οδηγούμαστε σε μονοσήμαντα αποτελέσματα. Για παράδειγμα

$$\sqrt{i} = i^{1/3} = (e^{i\pi/2})^{1/3} = e^{i\pi/6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

αλλά και

$$\sqrt{i} = i^{1/3} = (e^{5i\pi/2})^{1/3} = e^{5i\pi/6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i) \ !$$

[87]Η χρήση του συμβόλου log αντί του ln που έχετε συνηθίσει οφείλεται στην έμφαση που δίνουμε στη μοναδικότητα του φυσικού λαγαρίθμου ως αντίστροφη συνάρτηση της e^x. Έτσι αντι να διακρίνουμε τον μοναδικό λογάριθμο που έρχεται με φυσικό τρόπο, θα διακρίνουμε όλους τους άλλους ανθρωπογενείς "τεχνητούς" λογαρίθμους, π.χ. $\log_{10}$.

Γενικά εξαιτίας των πολλαπλών αποτελεσμάτων φροντίζει κανείς να περιορίσει καταλλήλως τα αποτελέσματα ενός τέτοιου υπολογισμού ορίζοντας έναν κλάδο, όπως λέγεται, που περιορίζει τα δυνατά ορίσματα.

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό, ας δούμε πόσες λύσεις μπορούμε να βρούμε στο πρόβλημα

$$z^k = -1 \ ,$$

όπου το k είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Αν καταφύγουμε στην πολική γραφή

$$(|z|e^{i\phi})^k = e^{i\pi} = e^{i3\pi} = \ldots = e^{i(2p+1)\pi}, \text{ με } p \in \mathbb{Z}$$

επομένως οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι

$$z_k = e^{i\pi/k} = e^{i3\pi/k} = \ldots = e^{i(2p+1)\pi/k} \ .$$

Υπάρχουν ακριβώς k τέτοιοι διαφορετικοί αριθμοί. Ο τελευταίος της σειράς είναι ο $e^{i(2k-1)\pi/k}$ γιατί ο επόμενος που θα δοκιμάζαμε να γράψουμε θα ήταν ο

$$e^{i(2k+1)\pi/k} = e^{i(2\pi+1\pi/k)} = e^{i\pi/k} \ ,$$

που είναι ο πρώτος της σειράς. Οι k αυτοί διαφορετικοί αριθμοί είναι οι k ρίζες του (-1) και αντιστοίχως θα μπορούσαν να κατασκευαστούν οι k ρίζες οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού. Αυτό είναι ένα παράδειγμα που βλέπει κανείς ότι η εξίσωση

$$x^k = z_0$$

έχει ακριβώς τόσες μιγαδικές ρίζες όσος είναι και ο βαθμός του αντιστοίχου πολυωνύμου. Αυτό είναι το περιεχόμενο ενός πολύ σημαντικού θεωρήματος της άλγεβρας: κάθε πολυωνυμική εξίσωση βαθμού N έχει N μιγαδικές ρίζες (κάποιες ίσως πολλαπλές). Ειδικά οι k-ρίζες της μονάδας, σχηματίζουν τις ακτίνες ενός κανονικού πολυγώνου με k πλευρές στο μιγαδικό επίπεδο.

4.4 Ένα φυσικό πρόβλημα λυμένο με τη βοήθεια των μιγαδικών

Έστω δύο σημειακά φορτία μεγέθους $+2Q$ και $-Q$ τοποθετημένα επί του άξονα x, στις θέσεις $x = 2$ και $x = -1$, αντίστοιχα. Σε ποια σημεία του χώρου το δυναμικό είναι 0; Ας ξεκινήσουμε την αναζήτησή μας στο επίπεδο $x - y$.

Αν $V(\vec{r}) = 0$ τότε

$$\frac{2Q}{r_1} + \frac{-Q}{r_2} = 0 \ ,$$

όπου r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις του συγκεκριμένου προς αναζήτηση σημείου από τα $\vec{R}_1 = (2, 0)$ και $\vec{R}_2 = (-1, 0)$. Δηλαδή θα πρέπει

$$\frac{|\vec{r} - \vec{R}_1|}{|\vec{r} - \vec{R}_2|} = 2 \ .$$

Αν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς για να αναπαραστήσουμε τη θέση στο επίπεδο x, y του εν λόγω σημείου η ανωτέρω σχέση θα μπορούσε να γραφεί

$$\frac{|z-2|}{|z+1|} = 2 \ ,$$

δηλαδή

$$\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = 2 \ ,$$

ή

$$\frac{z-2}{z+1} = 2e^{i\phi} \ .$$

Λύνοντας αυτήν ως προς z βρίσκουμε

$$z = \frac{2+2e^{i\phi}}{1-2e^{i\phi}} \ .$$

Πρακτικά αν θέλαμε να καθορίσουμε τη ζητούμενη ισοδυναμική γραμμή, θα θέταμε διάφορες τιμές στο όρισμα ϕ και θα λαμβάναμε όλες τις δυνατές μιγαδικές τιμές του z του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος θα έδιναν τις x και y συντεταγμένες των υπό διερεύνηση σημείων.

Εμείς θέλουμε να πάρουμε μια συνολική πληροφορία για το σχήμα αυτής της γραμμής. Προς τούτο θα αφαιρέσουμε από τον z έναν πραγματικό αριθμό, έτσι ώστε το κλάσμα που θα δημιουργηθεί να λάβει τη μορφή

$$\frac{sa+sbe^{i\phi}}{b+ae^{i\phi}} = s\frac{a+be^{i\phi}}{b+ae^{i\phi}} \ ,$$

με a, b, s, ϕ πραγματικούς αριθμούς. Ο συμμετρικός συνδυασμός

$$\frac{a+be^{i\phi}}{b+ae^{i\phi}}$$

είναι μαζί με τους

$$\frac{a+be^{i\phi}}{a+be^{i\phi}}, \frac{-a-be^{i\phi}}{a+be^{i\phi}}, \frac{-b-ae^{i\phi}}{a+be^{i\phi}}$$

οι μοναδικοί συνδυασμοί που τα αντίστοιχα κλάσματα έχουν μέτρο 1 για οποιαδήποτε γωνία ϕ.[88] Επιδιώκουμε, λοιπόν, να βρούμε πραγματικό αριθμό A έτοιον ώστε

$$z - A = \frac{2+2e^{i\phi}}{1-2e^{i\phi}} - A = \frac{(2-A)+(2+2A)e^{i\phi}}{1-2e^{i\phi}}$$

[88]Ένας γεωμετρικός τρόπος να το δείτε αυτό είναι να φανταστείτε τα παραλληλόγραμμα με πλευρές, a και $be^{i\phi}$, b και $ae^{i\phi}$, $-a$ και $-be^{i\phi}$, $-b$ και $-ae^{i\phi}$.

να φτιάχνει ένα από τα παραπάνω σταθερού μέτρου κλάσματα. Ή θα πρέπει να είναι

$$\frac{2-A}{2+2A} = \frac{1}{-2} \text{ ή } \frac{2-A}{2+2A} = \frac{-2}{1} \ .$$

Η πρώτη δεν οδηγεί σε καμία λύση, ενώ η δεύτερη οδηγεί στη λύση $A = -2$. Επομένως ο αριθμός

$$z - (-2) = \frac{4 - 2e^{i\phi}}{1 - 2e^{i\phi}} = 2\frac{2 - e^{i\phi}}{1 - 2e^{i\phi}} = 2e^{i\theta}$$

είναι, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση το διπλάσιο ενός αριθμού μέτρου 1, γι' αυτό και τον γράψαμε παραπάνω ως $2e^{i\theta}$. Συνεπώς οι λύσεις μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού που ψάχνουμε αναπαρίστανται στο μιγαδικό επίπεδο ως σημεία πάνω σε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο $z_0 = -2$ και ακτίνα ίση με 2. Θα μπορούσε βέβαια να ισχυριστεί κανείς ότι εκ του αποτελέσματος δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι κάθε σημείο του προαναφερθέντος κύκλου αποτελεί λύση του προβλήματός μας, εφόσον ναι μεν ο αριθμός

$$\frac{2 - e^{i\phi}}{1 - 2e^{i\phi}}$$

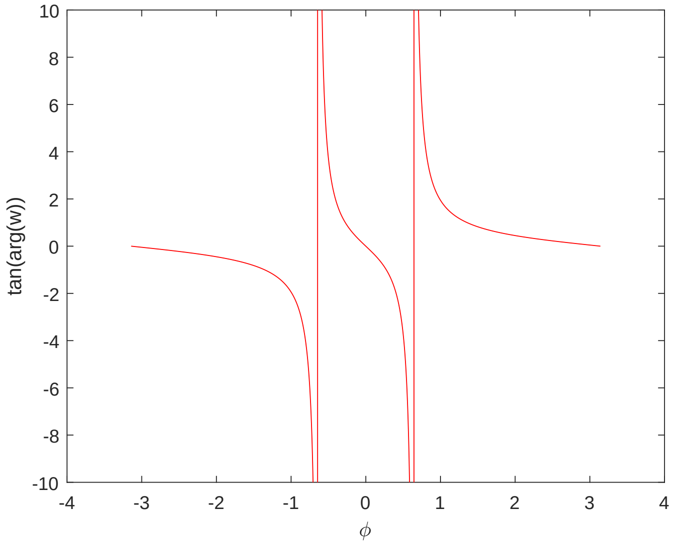
έχει μέτρο 1, αλλά δεν γνωρίζουμε αν καλύπτει κάθε δυνατό όρισμα θ. Για να μπορέσουμε να βεβαιωθούμε για την κάλυψη όλου αυτού του κύκλου θα πρέπει να υπολογίσουμε το όρισμα του μοναδιαίου θ, ως συνάρτηση της γωνίας ϕ:

$$\begin{aligned} w = \frac{2 - e^{i\phi}}{1 - 2e^{i\phi}} &= \frac{2 - e^{i\phi}}{1 - 2e^{i\phi}}\frac{1 - 2e^{-i\phi}}{1 - 2e^{-i\phi}} \\ &= \frac{4 - e^{i\phi} - 4e^{-i\phi}}{5 - 2(e^{i\phi} + e^{-i\phi})} \\ &= \frac{4 - 5\cos\phi + 3i\sin\phi}{5 - 4\cos\phi} \ . \end{aligned}$$

Αφού ο παρονομαστής έχει καταστεί πραγματικός, το όρισμα του συγκεκριμένου μοναδιαίου μιγαδικού αριθμού είναι

$$\arg w = \tan^{-1}\left(\frac{3\sin\phi}{4 - 5\cos\phi}\right) \ .$$

Η συνάρτηση στο όρισμα της $\tan^{-1}$ λαμβάνει κάθε δυνατή τιμή στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ και μάλιστα δύο φορές αφού αυτή εκτελεί άπειρο άλμα μεταξύ του $-\infty$ και του $+\infty$ σε δύο γωνίες: τις $\phi_\pm = \pm\cos^{-1}(4/5)$ (βλ. σχήμα). Συνεπώς ο w μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μοναδιαίος μιγαδικός. Με άλλα λόγια η λύση μας είναι ένας πλήρης κύκλος ακτίνας 2 γύρω από το σημείο $z_0 = -2$. Αφού βρήκαμε αυτή τη λύση στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αντίστοιχος κύκλος στο επίπεδο $x - y$ είναι μια ισοδυναμική γραμμή και αν περιστρέψουμε αυτόν τον κύκλο γύρω από τον



Σχήμα 35: Η συνάρτηση $\tan(\arg(w)) = 3\sin\phi/(4-5\cos\phi)$ εκτελεί δύο άλματα μεταξύ των $-\infty$ και $+\infty$. Επομένως το όρισμα $\arg(w)$ μπορεί να λάβει κάθε δυνατή τιμή στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

άξονα x θα λάβουμε μια ισοδυναμική επιφάνεια που θα έχει τη μορφή σφαίρας. Το πολύ όμορφο αυτό αποτέλεσμα είναι γνωστό από την αρχαιότητα ως ο κύκλος του Μενελάου με το γεωμετρικό χαρακτηριστικό να κρατά σταθερό το λόγο των αποστάσεων από δύο δοθέντα σημεία. Όπως θα μάθετε αργότερα στον ηλεκτρομαγνητισμό, το χαρακτηριστικό αυτό μπορεί να μας βοηθήσει να κατασκευάζουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο τοποθετημένο στο εξωτερικό (ή το εσωτερικό) μιας αγώγιμης (μεταλικής) σφαίρας. Η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος των ειδώλων και βασίζεται στην παραπάνω γεωμετρική ιδιότητα την οποια εμείς προσεγγίσαμε μέσω των μιγαδικών αριθμών.

Θα δείξουμε και μια εναλλακτική μιγαδική κατασκευή της λύσης του παραπάνω προβλήματος η οποία δεν θα μας οδηγήσει τόσο καθαρά στον τελικό κύκλο, αλλά θα μας δείξει πως μπορούμε μέσω μιας απλής μιγαδικής έκφρασης να παριστάνουμε γεωμετρικά σχήματα, όπως αυτή ενός κύκλου. Θα ξεκινήσουμε και πάλι από τη βασική ζητούμενη ιδιότητα

$$\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = 2 \ ,$$

και προς τούτο, το κλάσμα $(z-2)/(z+1)$ θα το γράψουμε ως ζ. Γνωρίζουμε ότι $|\zeta| = 2$, οπότε

$$\zeta\,\zeta^\star = |\zeta|^2 = 4 \ ,$$

δηλαδή

$$
\begin{aligned}
4 &= \frac{(z-2)}{(z+1)}\frac{(z-2)^\star}{(z+1)^\star} \\
&= \frac{(z-2)(z^\star-2)}{(z+1)(z^\star+1)} \\
&= \frac{z\,z^\star+4-2(z+z^\star)}{z\,z^\star+1+(z+z^\star)} \Rightarrow \\
6(z+z^\star) &= -3z\,z^\star \Rightarrow \\
\frac{z+z^\star}{z\,z^\star} &= -1/2 \Rightarrow \\
\frac{1}{z}+\frac{1}{z^\star} &= -1/2\ ,
\end{aligned}
$$

και συμβολίζοντας το $1/z$ με ξ καταλήγουμε στη σχέση

$$\xi+\xi^\star = -1/2 \Rightarrow \Re(\xi) = -1/4 \Rightarrow \xi = -1/4+iy\ .$$

Βρήκαμε λοιπόν μετά από όλες αυτές τις πράξεις ότι

$$z = 1/\xi = \frac{1}{-1/4+iy}\ .$$

Δεν είναι καθόλου προφανές ότι ο παραπάνω μιγαδικός αριθμός, για τις διάφορες τιμές του y ορίζει έναν κύκλο! Και, όμως, ας φτιάξουμε έναν πίνακα τιμών του y και του z και θα πεισθούμε ότι αυτό πράγματι συμβαίνει.

y	z	$= z$	$\to z$
0	-4	-2-2	-2-2
-1/4	-4/(1+i)	-2(1-i)	-2 + 2i
1/4	-4/(1-i)	-2(1+i)	-2 - 2i
-1	-4/(1+4i)	$-\frac{4}{17}(1-4i)$	$-2+(\frac{30}{17}+\frac{16}{17}i)$
$\to\infty$	$-4/(1+(\infty i))$	$\to 0$	-2 +2

Στην τελευταία στήλη ο μιγαδικός αριθμός έχει λάβει τη μορφή

$$z = -2+\rho$$

όπου ρ είναι κάθε φορά ένας μιγαδικός μέτρου 2 (όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε). Είναι άξιο προσοχής λοιπόν ότι ένας μιγαδικός αριθμός $-1/4+iy$ που κινείται πάνω σε μια ευθεία παράλληλη με τον φανταστικό άξονα, έχει ως αντίστροφο έναν μιγαδικό αριθμό που κινείται πάνω σε ένα κύκλο. Γενικά με τους μιγαδικούς μπορούμε να μετασχηματίζουμε σχήματα, όπως παραπάνω, και έτσι να λύνουμε προβλήματα Φυσικής μετατρέποντάς τη γεωμετρία ενός προβλήματος σε μια άλλη γεωμετρία για την οποία μπορούμε να έχουμε μια πολύ απλούστερη λύση.

4.5 Η αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών ως πίνακες, ως προς τον πολλαπλασιασμό

Όταν ορίσαμε τους μιγαδικούς αριθμούς φάνηκε ότι μοιάζουν πολύ με διανύσματα του επιπέδου, σαν αυτά που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Όταν μάλιστα ορίσαμε και την πρόσθεση και την αφαίρεση μιγαδικών, η αντιστοίχιση φάνηκε να είναι ακριβέστατη. Αν σκεφθούμε όμως ότι στο πρώτο κεφάλαιο είχαμε αμφισβητήσει σθεναρά τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε ένα γινόμενο διανυσμάτων του επιπέδου που να συμπεριφέρεται ως αναλλοίωτο διάνυσμα του ίδιου του επιπέδου, ίσως να λάμψει μέσα μας ότι η μιγαδική κατασκευή μας παρέχει έναν πρώτης τάξης τρόπο να κατασκευάσουμε αυτό που δεν καταφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο. Είναι πράγματι έτσι;

Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Οι μιγαδικοί που θα είχαν στο μιγαδικό επίπεδο τις αντίστοιχες διανυσματικές αναπαραστάσεις θα ήταν οι $z_a = a_1 + a_2 i$ και $z_b = b_1 + b_2 i$ με γινόμενο

$$z_a z_b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \ .$$

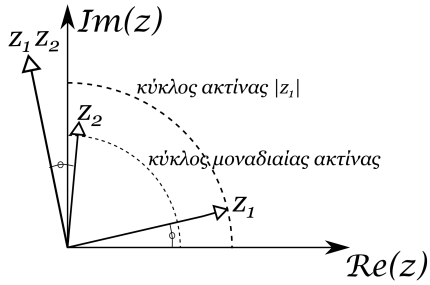
Μήπως λοιπόν το αντίστοιχο διάνυσμα

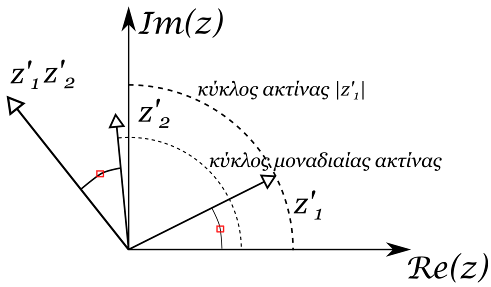
$$\vec{a} \odot \vec{b} = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)^{89}$$

είναι ένα "καλό" γινόμενο-διάνυσμα; Το κατασκεύασμα είναι μεν γραμμικό ως προς τις συνιστώσες των $\vec{a}, \vec{b}$, αλλά αρκεί να στρίψουμε τα αρχικά διανύσματα (αλλάζοντας το σύστημα των αξόνων) και το αποτέλεσμα δεν θα συνδέται με τα επί μέρους διανύσματα, με τον ίδιο τρόπο που συνδέονταν με τα αρχικά διανύσματα προ της στροφής. Αν θυμόσαστε το γινόμενο δύο μιγαδικών έχει ως όρισμα (γωνία) το άθροισμα των δύο αρχικών ορισμάτων. Επομένως αν στραφούν και τα δύο διανύσματα κατά την ίδια γωνία το γινόμενό τους θα αλλάξει θέση σε σχέση με τα δύο διανύσματα· αυτό σίγουρα δεν είναι ένα αναλλοίωτο διάνυσμα! Σωστά λοιπόν στο πρώτο κεφάλαιο είχαμε αποκλείσει τη δημιουργία ενός διανυσματικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Το γινόμενο δύο μιγαδικών χαλάει κάπως την εικόνα των μιγαδικών ως διανύσματα. Εξάλλου το τετράγωνο του μέτρου ενός διανύσματος (το τετράγωνο ενός διανύσματος) φτιάχνεται από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο συνιστωσών του, όπως ακριβώς και το τετράγωνο του μέτρου ενός μιγαδικού που όμως δεν είναι το τετράγωνο του μιγαδικού με τον εαυτό του αλλά το γινόμενο $z\ z^{\star}$. Η διαφοροποίηση βρίσκεται κατ' ουσίαν στην ιδιαιτερότητα του μιγαδικού άξονα έναντι του πραγματικού σε αντίθεση με τους άξονες x και y οι οποίοι δεν παρουσιάζουνε καμία ουσιαστική διαφορά.

Θα μπορούσαμε μήπως να επιλέξουμε κάποια άλλη αναπαράσταση των μιγαδικών ώστε να οδηγεί στο σωστό γινόμενο; Ναι. Όπως θα δείξουμε αμέσως στη συνέχεια οι

[89] Προσοχή: Ο συμβολισμός $\odot$ είναι και πάλι ένας πειραματικός μη-δόκιμος συμβολισμός σαν τα $\star$ του πρώτου κεφαλαίου. Δεν πρόκειται για συμβολισμό που χρησιμοποιείται στην επιστημονική βιβλιογραφία. Εξάλλου, όπως θα διαπιστώσετε, αυτή η κατασκευή τελικά στερείται νοήματος ως ένα αναλλοίωτο διάνυσμα.





Σχήμα 36: Αν τα διανύσματα τα αντίστοιχα των δύο μιγαδικών στραφούν το υποτιθέμενο γινόμενο των διανυσμάτων (το αντίστοιχο του γινομένου των δύο μιγαδικών) θα αλλάξει θέση σε σχέση με τα δύο διανύσματα.

μιγαδικοί δρουν ως πίνακες αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό τους. Κατ' ουσίαν το έχουμε δείξει αυτό. Θυμηθείτε ότι δύο πίνακες στροφής, όταν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους, οδηγούν σε έναν νέο πίνακα στροφής με γωνία όση το άθροισμα των δύο επί μέρους πινάκων, όπως ακριβώς και οι μιγαδικοί όσον αφορά τα ορίσματά τους. Αν το μέτρο των μιγαδικών αντιστοιχιστεί κι αυτό με έναν παράγοντα που πολλαπλασιάζει έναν πίνακα στροφής, θα έχουμε τελικά έναν πίνακα 2×2 που θα αντιπροσωπεύει πλήρως έναν μιγαδικό ως προς την πολλαπλασιαστική του δράση. Για παράδειγμα αν κάνουμε την αντιστοίχιση

$$z = ae^{i\phi} \leftrightarrow \mathbf{R} = a \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

το γινόμενο $z_1 z_2$ θα αντιστοιχιζόταν στο γινόμενο

$$\mathbf{R_1 R_2} = a_1 a_2 \begin{pmatrix} \cos(\phi_1+\phi_2) & \sin(\phi_1+\phi_2) \\ -\sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix} .$$

Οι μιγαδικοί συμπεριφέρονται ως προς τον πολλαπλασιασμό τους όπως οι πίνακες οι 2×2.

4.6 Μιγαδικοί πίνακες - ερμιτιανοί πίνακες - πίνακες του Pauli

Στο εδάφιο αυτό θα συνδυάσουμε όσα μάθαμε για τους πίνακες με τους νέους μιγαδικούς αριθμούς που εισαγάγαμε στο παρόν κεφάλαιο. Θα επιτρέψουμε στους πίνακες να έχουν μιγαδικά στοιχεία. Αν και μια τέτοια επέκταση μοιάζει περισσότερο με παιγνίδι παρά με κάτι το οποίο απευθύνεται στον πραγματικό φυσικό μας κόσμο, θα γνωρίσουμε μιγαδικούς πίνακες που περιγράφουν με τον καλύτερο τρόπο, σύμφωνα με τις μέχρι σήμερα γνώσεις μας, τα πραγματικά φυσικά συστήματα.

Ας ξεκινήσουμε με έναν πίνακα διάστασης 2×2, αποτελούμενο από πραγματικά στοιχεία, και τον οποίο έχουμε συζητήσει επανειλημμένως για διαφορετικούς λόγους. Αναφερόμαστε στον πίνακα στροφής στο επίπεδο:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} ,$$

ο οποίος μετασχηματίζει τα διανύσματα, όταν οι άξονες του συστήματος αναφοράς στραφούν κατά γωνία ϕ. Πέραν της όμορφης μισοσυμμετρικής (λόγω διαγωνίων στοιχείων) - μισοαντισυμμετρικής (λόγω μη διαγωνίων στοιχείων) δομής του πίνακα, ο πίνακας δεν φαίνεται να κρύβει καμία παραξενιά. Ας δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε τα ιδιοανύσματα και τις ιδιοτιμές του. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \Rightarrow \\ (\cos\phi - \lambda)^2 + \sin^2\phi &= 0 \Rightarrow \\ \lambda^2 - 2\lambda\cos\phi + 1 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Το παραπάνω πολυώνυμο, όντας 2ου βαθμού, έχει δύο, εν γένει, μιγαδικές ρίζες.[90] Τις

$$\lambda_\pm = \cos\phi \pm \sqrt{\cos^2\phi - 1} = \cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi} \ .$$

Ας κλείσουμε, προς το παρόν, τα μάτια στο απροσδόκητο αυτό αποτέλεσμα και ας κάνουμε και το επόμενο βήμα εύρεσης των αντίστοιχων ιδιοανυσμάτων.

$$(\mathbf{R} - \lambda_\pm\mathbf{I})\mathbf{X}^\pm = \mathbf{0} \ .^{91} \tag{58}$$

Συμπληρώνοντας τα στοιχεία του πινάκων βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} \cos\phi - e^{\pm i\phi} & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi - e^{\pm i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\pm \\ b^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

[90] Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα εύρεσης ιδιοτιμών είχαμε εντέχνως αποφύγει να καταλήξουμε σε χαρακτηριστικά πολυώνυμα με μη πραγματικές λύσεις. Κατ' ουσίαν όμως δεν υπήρχε κάποιος εγγενής λόγος να αποτρέπεται η εύρεση μη πραγματικών ιδιοτιμών. Ο λόγος που αποφύγαμε τέτοιες περιπτώσεις είναι γιατί ούτε φανταζόμασταν τι νόημα έχουν οι φανταστικοί αριθμοί, ούτε και θα ξέραμε πως να ερμηνεύσουμε ιδιοανύσματα με μιγαδικές ιδιοτιμές. Πολύ δε περισσότερο, αν και τα ιδιοανύσματα κατέληγαν να είναι μιγαδικά.

[91] Η εξίσωση πινάκων που γράψαμε είναι κατ' ουσίαν δύο εξισώσεις. Μια για το ιδιοάνυσμα $\mathbf{X}^+$ με ιδιοτιμή $\lambda_+ = e^{i\phi}$ και μια για το ιδιοάνυσμα $\mathbf{X}^-$ με ιδιοτιμή $\lambda_- = e^{-i\phi}$. Προτιμήσαμε τη συνοπτική αυτή γραφή που εμπεριέχει και τις δύο εξισώσεις.

$$\left(\begin{array}{cc} \mp i \sin\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \mp i \sin\phi \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a^\pm \\ b^\pm \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) ,$$

με λύση

$$= b^\pm = \pm i a^\pm ,$$

όπου a^+, b^+ είναι τα στοιχεία του $\mathbf{X}^+$ και a^-, b^- είναι τα στοιχεία του $\mathbf{X}^-$. Όπως έχουμε μάθει δεν έχει νόημα να ψάχνουμε για τα ιδιοανύσματα διανύσματα με συγκεκριμένες συνιστώσες. Αυτό που ζητάμε είναι συγκεκριμένες αναλογίες συνιστωσών. Επομένως ως ιδιοανύσματα μπορούμε να θεωρήσουμε τα

$$\mathbf{X}^+ = \left(\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right) , \ \mathbf{X}^- = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array} \right) .$$

Τι ακριβώς είναι αυτά τα διανύσματα; Ποια είναι η κατεύθυνσή τους στο επιπέδο; Τι σημαίνει να είναι η y-συντεταγμένη i ή $-i$;

Ας κάνουμε κάποια βήματα πίσω και ας αναρωτηθούμε τι σημαίνει να βρούμε ιδιοανύσματα του πίνακα στροφής. Υποτίθεται ότι τα ιδιοανύσματα δεν αλλάζουν κατεύθυνση όταν δράσει πάνω τους ο συγκεκριμένος πίνακας. Όμως ο πίνακας στροφής στρίβει εκ κατασκευής τα διανύσματα τα οποία πολλαπλασιάζει. Δεν μπορεί να τα αφήσει στην αρχική τους κατεύθυνση.[92] Μόνο που τώρα το ιδιοάνυσμα που βρήκαμε έχει και πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$\mathbf{X}^+ = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) + i \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

οπότε δρώντας στο κάθε μέρος ο πίνακας στροφής, τα στρίβει στα

$$\mathbf{R} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \cos\phi \\ -\sin\phi \end{array} \right) , \ \mathbf{R} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sin\phi \\ \cos\phi \end{array} \right) .$$

Ξαναγράφοντας τα στριμμένα διανύσματα με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής αναπαράστασης του $e^{i\phi}$ και συνενώνοντας τα μέσω του γραμμικού συνδυασμού που αναλύσαμε το $\mathbf{X}^+$ βρίσκουμε

$$\mathbf{R}\,\mathbf{X}^+ = \left(\begin{array}{c} \Re(e^{i\phi}) \\ -\Im(e^{i\phi}) \end{array} \right) + i \left(\begin{array}{c} \Im(e^{i\phi}) \\ \Re(e^{i\phi}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} e^{i\phi} \\ i e^{i\phi} \end{array} \right) = e^{i\phi} \left(\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right) .$$

Το αρχικό διάνυσμα ουσιαστικά δεν άλλαξε. Έμεινε στην ίδια κατεύθυνση ως αναλογία x και y συνιστωσών, αλλά και οι δύο συνιστώσες άλλαξαν ταυτόχρονα τιμές και μάλιστα μιγαδοποιήθηκαν (στην πραγματική προστέθηκε και φανταστική συνιστώσα και στη φανταστική προστέθηκε και πραγματική συνιστώσα).

[92]Εκτός και αν ο πίνακας στροφής έχει $\phi = 0$, οπότε πρόκειται για τον μοναδιαίο πίνακα.

Αν σε πραγματικούς πίνακες μπορούν να αντιστοιχούν μιγαδικές ιδιοτιμές και ιδιοανύσματα, πόσο μάλλον σε μιγαδικούς πίνακες, δηλαδή σε πίνακες με μιγαδικά στοιχεία. Μεταξύ των μιγαδικών πινάκων υπάρχει μια ιδιαίτερη κατηγορία πινάκων, οι *ερμιτιανοί πίνακες*[93] οι οποίοι αν και μιγαδικοί, εν γένει, φέρονται σαν τους συμμετρικούς πραγματικούς πίνακες όσον αφορά την ανάλυσή τους σε ιδιοανύσματα. Οι πίνακες αυτοί αναπαριστούν υπό μορφή πινάκων όλα τα φυσικά μεγέθη στην κβαντομηχανική, τη βασική θεωρία που εξηγεί καλύτερα τη συμπεριφορά του κόσμου με τις παρούσες γνώσεις μας.

Οι ερμιτιανοί πίνακες έχουν την ιδιότητα

$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}^\top)^\star \ ,$$

δηλαδή συμπίτουν με το συζυγές μιγαδικό του αναστρόφου τους. Κάθε στοιχείο τους H_{ij} είναι ίσο με το $(H_{ji})^\star$. Μάλιστα υπάρχει και ένα σύμβολο που αντιστοιχεί στη διπλή αυτή μεταμόρφωση ενός πίνακα:

$$\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^\top)^\star$$

που ονομάζεται *dagger* ή στιλέτο. Ο πίνακας $\mathbf{H}^\dagger$ ονομάζεται ερμιτιανός συζυγής του $\mathbf{H}$, οπότε ένας πίνακας καλείται ερμιτιανός αν συμπίπτει με τον ερμιιανό συζυγή του.

Ας περιοριστούμε εδώ στους ερμιτιανούς πίνακες διάστασης 2×2. Έστω ένας τέτοιος πίνακας με στοιχεία

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \ .$$

Προκειμένου να είναι ερμιτιανός θα πρέπει να συμπίπτει με τον ερμιτιανό συζυγή του, δηλαδή,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^\top)^\star = \begin{pmatrix} z_1^\star & z_3^\star \\ z_2^\star & z_4^\star \end{pmatrix} \ .$$

θα πρέπει δηλαδή τα 4 μιγαδικά, εν γένει, στοιχεία του πίνακα να ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$z_1 = z_1^\star \tag{59}$$
$$z_2 = z_3^\star \tag{60}$$
$$z_3 = z_2^\star \tag{61}$$
$$z_4 = z_4^\star \tag{62}$$

Οι (59,62) συνεπάγονται ότι οι αριθμοί z_1, z_4 είναι πραγματικοί, ενώ οι (60,61) που κατ' ουσίαν είναι μία μόνο εξίσωση, επιβάλλουν οι μη διαγώνιοι όροι να είναι μιγαδικοί

[93]Προς τιμήν του γάλλου μαθηματικού Charles Hermite [1822-1901] που απέδειξε για πρώτη φορά ότι οι συγκεκριμένοι πίνακες γενικεύουν τα χαρακτηριστικά των συμμετρικών πραγματικών πινάκων, όσον αφορά τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματά τους.

συζυγείς. Επομένως ο γενικότερος 2×2 ερμιτιανός πίνακας έχει τη μορφή

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & z \\ z^\star & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & b \end{pmatrix} ,$$

όπου a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί. Προτού προβούμε σε ανάλυση των ιδιοανυσμάτων ενός τέτοιου ερμιτιανού πίνακα, ας δούμε κάποια βασικά τους χαρακτηριστικά:

1. Οι συμμετρικοί πραγματικοί πίνακες είναι ερμιτιανοί πίνακες. Αυτό ισχύει προφανώς για όλους τους τετραγωνικούς συμμετρικούς πίνακες και όχι μόνο για τους 2×2.

2. Κάθε τέτοιος ερμιτιανός πίνακας μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων ερμιτιανών πινάκων:

$$\mathbf{H} = \frac{a+d}{2}\, \mathbf{I} + \frac{a-d}{2}\, \boldsymbol{\sigma}_3 + c\, \boldsymbol{\sigma}_1 + d\, \boldsymbol{\sigma}_2 ,$$

όπου

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \ \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \ \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Οι 3 αυτοί πίνακες είναι γνωστοί ως πίνακες του Pauli[94] και αποτελούν μαζί με τον μοναδιαίο πίνακα μια βάση για να περιγράψει κανείς κάθε ερμιτιανό πίνακα με διάσταση 2×2. Στην κβαντομηχανική οι πίνακες αυτοί χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν ένα φυσικό μέγεθος με δύο δυνατές κατάστάσεις, όπως για παράδειγμα το σπιν ενός ηλεκτρονίου.

Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές ενός γενικού 2×2 ερμιτιανού πίνακα.

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & c - id \\ c + id & b - \lambda \end{pmatrix} = 0 .$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - (c^2 + d^2) = 0 ,$$

με ρίζες (ιδιοτιμές):

$$\lambda_\pm = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + 4(c^2+d^2)}}{2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4(c^2+d^2)}}{2} .$$

Παρατηρούμε ότι παρόλο που ξεκινήσαμε με μιγαδικό πίνακα καταλήξαμε σε πραγματικές ιδιοτιμές. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κάθε ερμιτιανό πίνακα, ανεξαρτήτου διάστασης και η απόδειξη (που δεν θα παρουσιάσουμε εδώ) ακολουθεί σε γενικές

[94]Τους πρωτοεισήγαγε ο Wolfgang Ernst Pauli [1900-1958] για να περιγράψει την κβαντομηχανική συμπεριφορά του παρατηρούμενου σπιν ενός ηλεκτρονίου.

γραμμές τις κατασκευές που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε την ορθογωνιότητα των ιδιοανυσμάτων των συμμετρικών πινάκων. Το ξεχωριστό αυτό χαρακτηριστικό των ερμιτιανών πινάκων καθιστά τους ερμιτιανούς πίνακες τόσο σημαντικούς στην κβαντομηχανική. Τα φυσικά μεγέθη στη θεωρία αυτή περιγράφονται με τελεστές (αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα που μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες), αλλά οι ιδιοτιμές αυτών είναι οι ποσότητες που μετράμε όταν κάνουμε πειράματα οι οποίες είναι προφανώς πραγματικές.

Ας αναζητήσουμε και τα ιδιοανύσματα των παραπάνω ερμιτιανών πινάκων:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a-\lambda^{\pm} & c-id \\ c+id & b-\lambda^{\pm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^{\pm} \\ q^{\pm} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
(a-\lambda^{\pm})p^{\pm} + (c-id)q^{\pm} &= 0 \Rightarrow \\
p^{\pm} &= \frac{c-id}{\lambda^{\pm}-a} q^{\pm} \; .
\end{aligned} \tag{63}$$

Τα ιδιοανύσματα $\mathbf{X}^{\pm}$ με συνιστώσες

$$\mathbf{X}^{+} = \begin{pmatrix} p^{+} \\ q^{+} \end{pmatrix} \; , \; \mathbf{X}^{-} = \begin{pmatrix} p^{-} \\ q^{-} \end{pmatrix} \; ,$$

είναι γενικά μιγαδικά, αλλά ικανοποιούν την ανάλογη σχέση ορθογωνιότητας των ιδιοανυσμάτων ενός συμμετρικού πίνακα:

$$(\mathbf{X}^{+})^{\dagger}\, \mathbf{X}^{-} = (\mathbf{X}^{-})^{\dagger}\, \mathbf{X}^{+} = 0 \; .$$ [95]

Η διαφορά με την κλασική σχέση ορθογωνιότητας είναι ότι το ένα από τα δύο διανύσματα πρέπει να ληφθεί με τις συζυγείς συνιστώσες του.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}^{+})^{\dagger}\, \mathbf{X}^{-} &= \begin{pmatrix} (p^{+})^{\star} & (q^{+})^{\star} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^{-} \\ q^{-} \end{pmatrix} \\
&= (p^{+})^{\star} p^{-} + (q^{+})^{\star} q^{-} \\
&= (q^{+})^{\star} q^{-} \left[\frac{c+id}{\lambda^{+}-a}\frac{c-id}{\lambda^{-}-a} + 1 \right] \; .
\end{aligned}$$

Είναι θέμα πράξεων να δείξει κανείς ότι η τελευταία αγκύλη ισούται με μηδέν.

Ας δούμε ως παράδειγμα ανάλυσης σε ιδιοανύσματα τον πιο περίεργο εμφανισιακά πίνακα του Pauli, τον $\boldsymbol{\sigma}_2$. Για τον πίνακα αυτόν με $a = b = c = 0$ και $d = 1$ οι ιδιοτιμές

[95] Αν και η εισαγωγή του ερμιτιανού συζυγούς ενός πίνακα χρησιμοποιήθηκε στην παραπάνω ανάλυση για τετραγωνικούς πίνακες, ο ορισμός του ερμιτιανού συζυγούς δεν απαγορεύει ο αρχικός πίνακας να μην είναι τετραγωνικός. Έτσι εδώ χρησιμοποιούμε τους ερμιτιανούς συζυγείς διανυσμάτων. Προφανώς μόνο ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί να είναι ερμιτιανός.

θα είναι $\lambda^{\pm} = \pm 1$. Τα δε αντίστοιχα ιδιοανύσματα θα έχουν την ακόλουθη σχέση μεταξύ των συνιστωσών τους

$$p^{+} = -iq^{+} \ , \ p^{-} = iq^{-}$$

δηλαδή τα ιδιοανύσματα θα είναι τα

$$\mathbf{X}^{+} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{X}^{-} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Τα διανύσματα αυτά είναι ακριβώς τα ιδιοανύσματα του πίνακα στροφής (αν τα πολλαπλασιάσει κανείς με τη φανταστική μονάδα). Όταν αναλύαμε τον πίνακα στροφής σπάσαμε τα ιδιοανύσματα σε πραγματικό και φανταστικό κομμάτι. Εδώ δεν χρειάζεται να το κάνουμε αυτό γιατί τα ιδιοανύσματα του $\boldsymbol{\sigma}_2$ εκφράζουν την κυματοσυνάρτηση ενός ηλεκτρονίου όταν το έχουμε προσανατολίσει με κατάλληλη διάταξη κατά μήκος του άξονα 2 δηλαδή του άξονα y και οι κυματοσυναρτήσεις δεν είναι άμεσα μετρούμενο μέγεθος οπότε μπορεί να έχει μιγαδικές σνιστώσες. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε για παράδειγμα το ιδιοάνυσμα-κυματοσυνάρτηση $\mathbf{X}^{+}$ ως τον μιγαδικό γραμμικό συνδυασμό

$$\mathbf{X}^{+} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Επειδή μάλιστα τα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι τα ιδιοανύσματα του $\boldsymbol{\sigma}_3$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές $+1$ και -1, το ηλεκτρόνιο του οποίου το σπιν το έχουμε αρχικά προσανατολίσει κατά μήκος του άξονα y, αν δοκιμάσουμε να του μετρήσουμε το σπιν κατά μήκος του τρίτου άξονα (του άξονα z) θα βρούμε τις μισές φορές $+1$ και τις μισές φορές -1. Ο λόγος είναι ότι ο γραμμικός συνδυασμός της κυματοσυνάρτησης $\mathbf{X}^{+}$ αποτελείται από 1 και i, φορές τα ιδιοανύσματα του $\boldsymbol{\sigma}_3$ που και τα δύο αυτά νούμερα έχουν μέτρο 1 ($|1|^2 = |i|^2 = 1$). Οι συντελεστές ενός γραμμικού συνδυασμού ιδιοανυσμάτων στην κβαντομηχανική περιγράφουν τη σχετική πιθανότητα να μετρηθεί η μία ή η άλλη ιδιοτιμή, μέσω των τετραγώνων των μέτρων τους.

Το ταξίδι-παιγνίδι μας τελείωσε (προς το παρόν). Ξεκινήσαμε με προσπάθειες αποτύπωσης της απτής πραγματικότητας ξεχωρίζοντας τις συμβολικές αναπαραστάσεις που έκρυβαν απλότητα, ή παρουσίαζαν συμμετρία. Στο δρόμο αρχίσαμε να λοξοδρομούμε παρουσιάζοντας ολοένα και πιο αφηρημένες κατασκευές. Το πιο ενδιαφέρον όμως σε αυτό το ταξίδι είναι ότι οι διαδοχικές αφαιρέσεις μας έδωσαν τη δυνατότητα να περιγράφουμε τελικά και πάλι την πραγματικότητα και μάλιστα την πιο απόκρυφη και απομακρυσμένη από την αισθητηριακή μας εμπειρία.

Βασικά συμπεράσματα:

1. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι αριθμοί που προκύπτουν από γραμμικό συνδυασμό της πραγαματικής και της φανταστικής μονάδας: 1 και i, με $i^2 = -1$ (εξ ορισμού)
$$z = a + i\,b \text{ με } a, b \in \mathbb{R}\ .$$
Οι δύο συντελεστές a, b ονομάζονται πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζονται:
$$a = \Re(z)\ ,\ b = \Im(z)\ .$$
2. Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός
$$z^\star = \Re(z) - i\Im(z)\ .$$
3. Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται ως το
$$|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{z\ z^\star} = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}$$
και είναι πραγματικός θετικός (ή μηδέν αριθμός).
4. Η πράξη της πρόσθεσης (αφαίρεσης) δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται μέσω της πρόσθεσης (αφαίρεσης) των πραγματικών και φανταστικών μερών των δύο μιγαδικών αντίστοιχα.
5. Η πράξη του πολλαπλασιασμού δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται μέσω του πολλαπλασιασμού όλων των επι μέρους μερών των μιγαδικών:
$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + aid + ibid = (ac - bd) + i(ad + bc)\ .$$
6. Όταν διαιρούμε με έναν μιγαδικό αριθμό, είναι βολικό να πολλαπλασιάζουμε και να διαιρούμε με τον συζυγή του ώστε ο παρονομαστής να καθίσταται πραγματικός.
7. Εξέχουσα θέση στην αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών έχει η αναπράσταση του Euler
$$z = |z|e^{i\theta}$$
όπου $\theta = \arg(z)$ (το όρισμα του μιγαδικού αριθμού) που δεν είναι άλλο από τη γωνία
$$\tan^{-1}\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right)$$
που σχηματίζει ο μιγαδικός αριθμός, αναπαριστώμενος ως διάνυσμα στο μιγαδικό πεδίο, με τον πραγματικό άξονα. Το μέτρο $|z|$ είναι το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος.

8. Αν και οι πραγματικοί πίνακες ενδέχεται να έχουν μιγαδικές ιδιοτιμές και ιδιοανύσματα, ένα ξεχωριστό είδος πινάκων, οι ερμιτιανοί που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger} = (\mathbf{H}^{\top})^{\star}$$
έχουν πραγματικές ιδιοτιμές. Οι πίνακες αυτοί έχουν τεράστια εφαρμογή στη Φυσική.

5 Ολίγα περί Γραμμικής Άλγεβρας *(ίσα ίσα για να γεμίσουμε έναν N-διάστατο χώρο)*

Στο πρώτο και στο τρίτο Κεφάλαιο, επικαλεστήκαμε συχνά τη γραμμικότητα ως ιδιότητα την οποία επιζητούσαμε διακαώς. Το διακιολογήσαμε, ως απαίτηση απλότητας προερχόμενη από την προηγούμενη εμπειρία μας όταν κάναμε απλές πράξεις με αριθμούς. Για παράδειγμα όταν εκτελούσαμε την πράξη $2(3+5)$ επικαλούμασταν την επιμεριστική ιδιότητα γαι να γράψουμε

$$2(3+\sqrt{5}) = 2\cdot 3 + 2\cdot\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}\ .$$

Περιέργως, η φύση μοιάζει πολλές φορές να λειτουργεί με τέτοιο απλό τρόπο (σε βαθύτερο μάλιστα επίπεδο, είναι ο κανόνας): Το αποτέλεσμα κάποιας φυσικής διεργασίας όταν συμβαίνει κάτι, και όταν συμβαίνει κάτι άλλο, να ακολουθεί αυτό τον απλό κανόνα απλής πρόσθεσης των αποτελεσμάτων, όταν συμβαίνουν και οι δύο διεργασίες μαζί. Μια τέτοια διεργασία παρουσιάζει, όπως λέμε, *γραμμική συμπεριφορά*. Για παράδειγμα όταν τοποθετήσουμε κάπου ένα φορτίο Q_1, τότε σε κάποιο άλλο σημείο Α του χώρου δημιουργείται ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_1$, ενώ αν τοποθετήσουμε κάπου αλλού ένα δεύτερο φορτίο Q_2, στο ίδιο σημείο Α θα δημιουργηθεί ένα άλλο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_2$. Η συνύπαρξη των δύο φορτίων θα δημιουργήσει στο Α ένα νέο ηλεκτρικό πεδίο το οποίο θα είναι ίσο με το διανυσματικό άθροισμα των δύο αρχικών πεδίων $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Επιπρόσθετα, αν τα στη θέση των αρχικών φορτίων τοποθετηθούν δύο άλλα φορτ῾θια