Μηχανική Ι
Αποστολάτος
Διάλεξη 9
21 / 10 / 22

- Συντηρητικές Δυνάμεις
- Δυναμική Ενέργεια

⤳ Έστω μια συνάρτηση θέσης $\vec{F}(\vec{r})$
Από τον 2ο Νόμο Newton έχω:

$$m\cdot\vec{a} = \vec{F} \xRightarrow{\cdot\vec{v}} \vec{v}\, m\vec{a} = \vec{v}\vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\vec{v}^2\right] = \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{F}}_{\text{ισχύς: ρυθμός προσφοράς ενέργειας}} \quad (a)$$

Στόχος: Να φτιάξουμε την ποσότητα $\vec{v}\cdot\vec{F}$ μια τέλεια χρονική παράγωγο ώστε να μεταφερθεί στο αριστερό μέλος και να γίνει $\frac{d}{dt}[\ ]=0$

Έστω ότι γράφουμε την δύναμη ως βαθμωτή συνάρτηση διανύσματος

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\underbrace{V}_{\text{βαθμωτή}}(\vec{r})$$

Το "−" είναι σύμβαση ώστε κατά την μεταφορά του όρου στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, το αποτέλεσμα να είναι άθροισμα όρων.

Έχω $\vec{v}\vec{F} = -\vec{v}\vec{\nabla}V = -\underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial x}v_x + \frac{\partial V}{\partial y}v_y + \frac{\partial V}{\partial z}v_z\right]}_{\text{τέλεια χρονική παράγωγος}}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$\frac{d}{dt}V(x,y,z) \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot V = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

διαιρώ με dt και έχω: $\frac{d}{dt}V(x,y,z)$

$$(a) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\vec{v}^2\right] = -\frac{d}{dt}\left[V(x,y,z)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(\vec{r})\right] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(\vec{r})}}_{\text{ονομάζουμε ΕΝΕΡΓΕΙΑ αυτήν την ποσότητα.}} = \text{σταθερό}$$

→ Καθώς ένα σωματίδιο κινείται και αλλάζει θέση και ταχύτητα, η ποσότητα αυτή παραμένει σταθερή.

→ Έχουμε ορίσει μια ποσότητα, το "έργο", διατυπωμένη ως:

$$W_{1\to 2} = \int_{"1"}^{"2"} \vec{F} d\vec{r} = \int_{A}^{B} \underbrace{(-\vec{\nabla} V)\cdot d\vec{r}}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot V)dr = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{\text{η μεταβολή της V επί το πόσο άλλαξε το x.}} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV(x,y,z)$$

Επομένως:

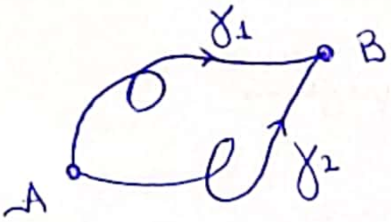
$$W_{1\to 2} = -\int_{A}^{B} dV(x,y,z)$$

$$= V(A) - V(B)$$

Δείξαμε, δηλαδή, ότι το έργο αυτής της δύναμης εξαρτάται από την συνάρτηση V και τις τιμές της μόνο για αρχικά και τελικά σημεία για οποία υπολογίζουμε το έργο. ΔΕΝ εξαρτάται από την διαδρομή.

Αυτό μας το έδωσε η σχέση $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.

Στην περίπτωση που το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής $\Rightarrow$ Ενέργεια = σταθερή



$\forall \gamma$: W = ίδιο $\Rightarrow$ E = σταθ.

Εξηγώντας το με μια συμβολική μαθηματική αναπαράσταση:

$$0 = \left(\int_{\substack{A\\ \gamma_1}}^{B} - \int_{\substack{A\\ \gamma_2}}^{B}\right)(\vec{F}\cdot d\vec{r}) = \left(\int_{\substack{A\\ \gamma_1}}^{B} + \int_{\substack{B\\ -\gamma_2}}^{A}\right)(\vec{F}\cdot d\vec{r}) = \oint$$

Μια δύναμη με αυτήν την ιδιότητα διατηρεί την ενέργεια $\rightarrow$

την ονομάζουμε:

Συντηρητική

Διατηρητική

Αστρόβιλη

Πως το ελέγχω χωρίς να χρειάζεται να παίρνω διαφορετικές καμπύλες;

ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΔΥΝΑΜΗΣ.

Αρκεί $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ παντού.

Αυτό μπορεί να γραφτεί και: $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$!

$$\underbrace{\oint_{\gamma}\vec{F}d\vec{r}}_{} = \underbrace{\int_{S(\gamma)}(\vec{\nabla}\times\vec{F})\,d\vec{S}}_{}$$

Έργο δύναμης F για διαδρομή από $1\rightarrow2\rightarrow1$ $\Rightarrow$ κλειστή καμπύλη

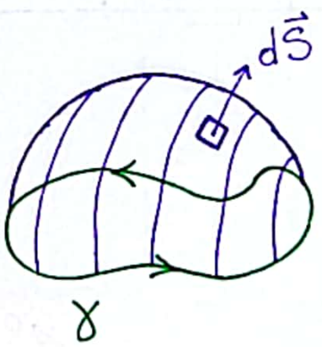
||

0

Επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού της $\vec{F}$ (διαν. συνάρτηση) πάνω σε ανοιχτή επιφάνεια για την οποία ισχύει:

$\underbrace{\partial S=\gamma}$ $\rightarrow$

Το θεώρημα Stokes συνδέει το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας διανυσματικής συνάρτησης πάνω σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο της επιφάνειας.



Αφού $=0$ θέλω και το δεξί μέλος να είναι $=0$.

Μικραίνω την καμπύλη τόσο ώστε να είναι απειροστά μικρή

οριακά να κλείσει σε σημείο.

$1^{η}$ περίπτωση: Ο στροβιλισμός γίνεται σε χώρο τόσο μικρό όπου δεν διαφοροποιείται $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$

$2^{η}$ περίπτωση: Κλείνω την καμπύλη με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι παράλληλη σε ένα από τα επίπεδα του χώρου (xy, yz, xz) επιλεγμένο ώστε $\vec{\nabla}\times\vec{F}\perp d\vec{S}$ και εκμεταλλεύομαι το εσωτερικό γινόμενο του Επιφ. ολοκληρ.

Μια πιο γενική, όχι απαραίτητα συντηρητικών δυνάμεων μόνο, ερμηνεία του στροβιλισμού είναι η εξής:

Αν δεν βάλω lim παίρνω τον μέσο όρο του στροβιλισμού σε μια όχι απειροστή επιφάνεια.

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{F}}_{\text{διανυσματικό πεδίο}} = \lim_{\underbrace{\gamma\to\text{σημείο}}} \frac{\overbrace{\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}}^{\text{κυκλοφορία της } \vec{F}}}{S(\gamma)}\,\underbrace{\hat{S}}_{\text{για να δώσουμε διάνυσμα}}$$

η γ συρρικνώνεται σε σημείο και αντίστοιχα συρρικνώνεται η επιφάνεια $S(\gamma)$.

Ο στροβιλισμός μετράει την κυκλοφορία σε μια κλειστή γραμμή που περικλείει ένα σημείο προς το σχεδόν αυτό σημείο.

Αν ο στροβιλισμός είναι μηδέν τότε το έργο είναι μηδέν $\Rightarrow$ Ενέργεια = σταθερή.

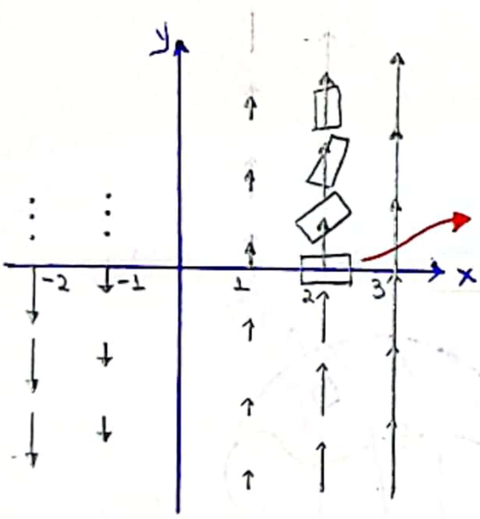
Παράδειγμα.

Έστω $\vec{F} = x\cdot\hat{y}$

Για τον στροβιλισμό έχω $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$ κλπ.

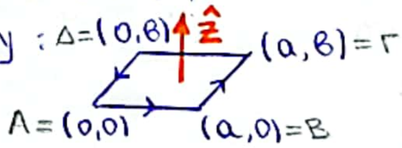
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{1}\,\hat{z}$$

όπου και να τοποθετήσω το σώμα στροβιλίζεται με τον ίδιο τρόπο.



και έτσι περιστρέφεται.

Διαλέγω κλειστή διαδρομή ΑΒΓΔΑ στο επίπεδο xy:



Υπολογίζω το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για $\vec{F}\cdot d\vec{r}$:

$$\oint_{ΑΒΓΔΑ} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{AB} \underbrace{\cancel{(x\cdot\hat{y})\hat{x}}}_{=0}dx + \int_{ΒΓ} \underbrace{(x\cdot\hat{y})\hat{y}}_{=\alpha}dy + \int_{ΓΔ} \underbrace{\cancel{(x\cdot\hat{y})(-\hat{x})}}_{=0}dx + \int_{ΔΑ} \underbrace{\cancel{(x\cdot\hat{y})(-\hat{y})}}_{=0}dy$$

AB: $=0$, $\vec{F}\perp d\vec{r}$, $\hat{x}\cdot\hat{y}=0$

ΒΓ: $=\alpha$ από τα όρια του ολοκληρώματος. $\hat{y}\cdot\hat{y}=1$

ΓΔ: $=0$, $\vec{F}\perp -d\vec{r}$, $\hat{x}\cdot\hat{y}=0$

ΔΑ: $=0$ από τα όρια του ολοκληρώματος.

$\alpha\cdot\int_0^\beta dy = \alpha\cdot\beta \longrightarrow$ Παίρνοντας το όριο αυτού του ολοκληρώματος, η ποσότητα $\alpha\cdot\beta \longrightarrow 0$ όσο ΑΒΓΔΑ $\to$ σημείο

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες

(i) η F συντηρητική

(ii) $\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \,, \forall \gamma$

(iii) $\int_{A,\gamma_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma_2}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} \,, \forall A,B \wedge \gamma_1 \neq \gamma_2$

(iv) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$ παντού (αστρόβιλη)

(v) $\vec{F} \underset{\text{γραφεί}}{\overset{\text{μπορεί να}}{=\!=}} -\vec{\nabla} V$

$$\text{πχ} \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}V) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{\partial V}{\partial x} & -\frac{\partial V}{\partial y} & -\frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{x}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]}_{} + \cdots$$

Χωρίς παθογένειες ασυνέχειας της συνάρτησης V, η ποσότητα αυτή $= 0$.

Εν τέλει $\vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}V) = \vec{0}$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\vec{F}=-\vec{\nabla}V}{=\!=\!=} -\oint dV = 0$$

συμπλήρωμα (v)

(vi) $\exists\, V(\vec{r}) : V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ } Εδώ υπάρχει μια αυθαιρεσία

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r})$$

αλλά $r_0 :=$ σημείο ελευθερ. και ορίζω $V(\vec{r}_0) \equiv 0$

(vii) $V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ + (iii)

που μου λέει ότι η πρόταση ισχύει $\forall \gamma$

Ανεξάρτητο της διαδρομής.

Scanned with CamScanner

• Τι είναι τελικά η δυναμική ενέργεια; $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$

• Γιατί είναι χρήσιμη; γιατί μετατρέπει μια διανυσματική συνάρτηση σε μια βαθμωτή, με την οποία μπορούμε να εργαστούμε πιο εύκολα.

Όταν μελετάω κίνηση μέσα σε πεδίο

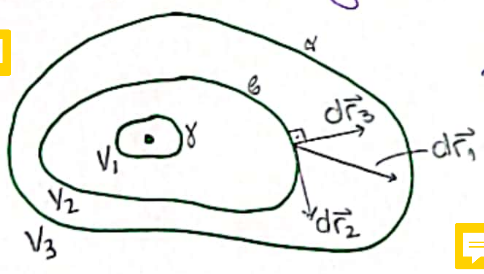
↳ Καλύτερος υπολογισμός των ποσοτήτων που ψάχνω γίνεται μέσω της βαθμωτής δυναμικής ενέργειας

γιατί

↳ Μπορώ να γεμίσω τον χώρο με ισοδυναμικές επιφάνειες.

↳ Μπορώ να συσχετίσω διάφορα σημεία του χώρου (αυτά που ανήκουν στο ∂S της ισοδυναμικής επιφάνειας) με αντίστοιχες τιμές δυναμικής ενέργειας.

(A) Βλέπω διάγραμμα V ⟶ φαντάζομαι πεδίο $\vec{F}$



Διαλέγω τα dr προς την κατεύθυνση που μεγαλώνει η V.

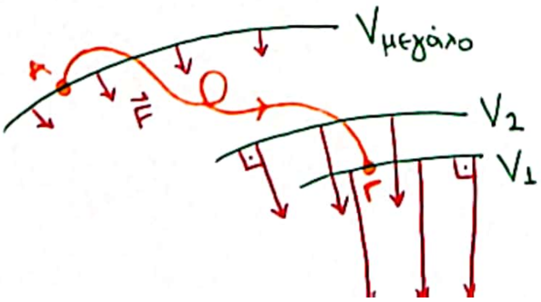
Έχω $-\vec{F}\cdot d\vec{r}_1>0$ και $-\vec{F}\cdot d\vec{r}_2=0 \Rightarrow \vec{F}\perp d\vec{r}_2$

Για να πάω από την ισοδυναμική επιφάνεια (β) → (α) το $dV_3>0 \Rightarrow -\vec{F}\cdot d\vec{r}_3>0$ με dr_3 θετικό ⇒ η F έχει φορά προς (γ)

$$\underbrace{dV=-\vec{F}d\vec{r}_3 \overset{\vec{F}/\!/d\vec{r}_3}{=\!=} |\vec{F}|\cdot|d\vec{r}_3|}$$

Αν μετακινηθώ κατά dr_3 τότε αν $dV>0$, όσο πιο μικρό είναι το dr_3 τόσο πιο μεγάλο είναι το F. ⟶ Αραιές ισοδυναμικές επιφ. → $dr\uparrow \rightarrow F\downarrow$

(B) Έχοντας το πεδίο δυνάμεων μπορώ να σχεδιάσω ποιοτικά τις ισοδυναμικές επιφάνειες.



$$\int_A^{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = V(A)-V(\Gamma)$$

ανεξάρτητο της διαδρομής.