

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

### Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται η κίνηση στερεού σώματος κάτω από την επίδραση δυνάμεων/ροπών. Η κίνηση αυτή μπορεί να αναλυθεί σε κίνηση κάποιου σημείου του στερεού  $O$  (π.χ. του κέντρου μάζας  $K$ , αλλά όχι απαραίτητα) και σε περιστροφή γύρω από άξονα που περνά από το  $O$ . Εναλλακτικά μπορεί να αναλυθεί σαν κίνηση κοχλία, δηλ. περιστροφική γύρω από κάποιο άξονα, μοναδικό σε κάθε χρόνο, που έχει την ιδιότητα η μεταφορική κίνηση του στερεού να γίνεται πάνω στον άξονα αυτό και μόνο. Η προτιμητέα μέθοδος εξαρτάται από το αν η κίνηση του στερεού γίνεται στο χώρο ή περιορίζεται να είναι επίπεδη, αν γίνεται γύρω από σταθερό άξονα, ή γύρω από σταθερό σημείο. Μελετώνται παραδείγματα για κάθε τέτοια περίπτωση, μέσω Νευτώνειας ή Αναλυτικής Μηχανικής. Μεταξύ αυτών μελετάται το φυσικό εκκρεμές, η κύλιση σώματος χωρίς ολίσθηση, η ελεύθερη περιστροφή στερεού στο χώρο και η ευστάθειά της και η κίνηση σφούρας.

**Προαπαιτούμενη γνώση:** Θεωρούνται δεδομένες οι εξισώσεις  $m\vec{v}_K = \Sigma F$  και  $\vec{L}_O + v_o \times m\vec{v}_K = M_O$  που ισχύουν για συστήματα σωμάτων, όπου  $v_K$  και  $v_o$  οι ταχύτητες του κέντρου μάζας  $K$  και κάποιου σημείου  $O$  ως προς αδρανειακό σύστημα,  $\Sigma F$  η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα,  $M_O$  η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το  $O$  και  $L_O$  η συνολική στροφορμή ως προς το  $O$ . Επίσης γνωστές θεωρούνται οι εξισώσεις Euler–Lagrange της Αναλυτικής Μηχανικής.

### 11.1 Μεταφορική - περιστροφική κίνηση στερεού σώματος

Στερεό εννοούμε ένα σώμα τα μέρη του οποίου βρίσκονται σε σταθερές αποστάσεις μεταξύ τους. Αν σκεφτούμε ένα σύστημα αναφοράς  $Oxyz$  σταθερό πάνω στο στερεό, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η θέση του στερεού καθορίζεται από έξι γενικευμένες συντεταγμένες, τρεις που καθορίζουν την θέση του σημείου  $O$  ως προς ένα αδρανειακό σύστημα  $\Omega\xi\eta\zeta$  και τρεις γωνίες που καθορίζουν τον προσανατολισμό του συστήματος  $Oxyz$  στο χώρο. Στα παρακάτω το σύστημα  $Oxyz$  μερικές φορές θα αναφέρεται και σαν  $Ox_1x_2x_3$  και το αδρανειακό σαν  $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ .

Η γενική κίνηση ενός στερεού σώματος σε ένα μικρό χρονικό διάστημα όμοια αναλύεται αφενός σε μία

μεταφορική παράλληλα στον εαυτό του, δηλ. παράλληλη μετατόπιση του συστήματος  $Oxyz$  με στιγμιαία ταχύτητα  $v_o$  ως προς ένα αδρανειακό παρατηρητή (αυτή είναι η ταχύτητα του σημείου  $O$ ) και αφετέρου σε μία περιστροφική γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $O$  με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Επομένως η ταχύτητα κάθε σημείου του στερεού που βρίσκεται σε θέση  $r$  (από το  $O$ ), όπως την μετρά ο αδρανειακός παρατηρητής είναι

$$v = v_o + \omega \times r. \quad (11.1)$$

(Ουσιαστικά πρόκειται για τη σχέση  $v = v_o + v_\sigma + \omega \times r$  που ξέρουμε για τα μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς, αλλά εδώ  $v_\sigma = 0$  αφού τα σημεία του στερεού είναι ακίνητα στο σύστημα  $Oxyz$ .)

Η επιλογή του σημείου  $O$  δεν είναι μοναδική, μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του στερεού, οπότε και η παραπάνω ανάλυση της κίνησης σε μεταφορική και περιστροφική δεν είναι μοναδική. Παρότι όμως η επιλογή του  $O$  προφανώς αλλάζει την ταχύτητα  $v_o$  και τις θέσεις  $r$ , η γωνιακή ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου. Αυτό γιατί αν επιλέγαμε ένα άλλο σημείο  $O'$  σταθερό επίσης ως προς το στερεό, η ταχύτητά του θα γραφόταν  $v'_o = v_o + \omega \times OO'$  και αφαιρώντας από τη σχέση για ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου  $v = v_o + \omega \times r$  βρίσκουμε ότι ισχύει  $v = v'_o + \omega \times (r - OO') = v'_o + \omega \times r'$  με ίδιο  $\omega$ .

## 11.2 Γωνίες Euler

Οι γωνίες αυτές είναι ένας τρόπος (από τους άπειρους που υπάρχουν) να καθορισθεί ο προσανατολισμός του στερεού στο χώρο, δηλ. ισοδύναμα να καθορισθεί ο προσανατολισμός του συστήματος  $Ox_1x_2x_3$  ως προς ένα δεδομένο σύστημα  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  με άξονες παράλληλους στο αδρανειακό. Βασίζεται στις ακόλουθες τρεις διαδοχικές στροφές που φαίνονται και στο σχήμα 11.1:

Ξεκινάμε από το σύστημα  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ .

Η στροφή κατά γωνία  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $O\xi_3$  δημιουργεί το σύστημα  $Ox''_1x''_2x''_3$  για το οποίο  $\hat{x}''_1 = \hat{\xi}_1 \cos \varphi + \hat{\xi}_2 \sin \varphi$ ,  $\hat{x}''_2 = -\hat{\xi}_1 \sin \varphi + \hat{\xi}_2 \cos \varphi$ ,  $\hat{x}''_3 = \hat{\xi}_3$ . Ισχύει δηλ.  $\begin{bmatrix} \hat{x}''_1 \\ \hat{x}''_2 \\ \hat{x}''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \\ \hat{\xi}_3 \end{bmatrix}$ .

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $x''_i = \hat{x}''_i \cdot r$ ,  $\xi_i = \hat{\xi}_i \cdot r$  διαπιστώνουμε ότι και οι συντεταγμένες στα δύο συστήματα συνδέονται με τον ίδιο πίνακα μετασχηματισμού (στροφής).

Η στροφή κατά γωνία  $\vartheta$  γύρω από τον άξονα  $Ox''_1$  δημιουργεί το σύστημα  $Ox'_1x'_2x'_3$  για το οποίο  $\hat{x}'_1 = \hat{x}''_1$ ,  $\hat{x}'_2 = \hat{x}''_2 \cos \vartheta + \hat{x}''_3 \sin \vartheta$ ,  $\hat{x}'_3 = -\hat{x}''_2 \sin \vartheta + \hat{x}''_3 \cos \vartheta$  και άρα  $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{bmatrix}$ .

Τέλος η στροφή κατά γωνία  $\psi$  γύρω από τον άξονα  $Ox'_3$  δημιουργεί το σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  για το οποίο  $\hat{x}_1 = \hat{x}'_1 \cos \psi + \hat{x}'_2 \sin \psi$ ,  $\hat{x}_2 = -\hat{x}'_1 \sin \psi + \hat{x}'_2 \cos \psi$ ,  $\hat{x}_3 = \hat{x}'_3$  και άρα  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$ .

Ο συνολικός μετασχηματισμός προκύπτει από το γινόμενο των πινάκων

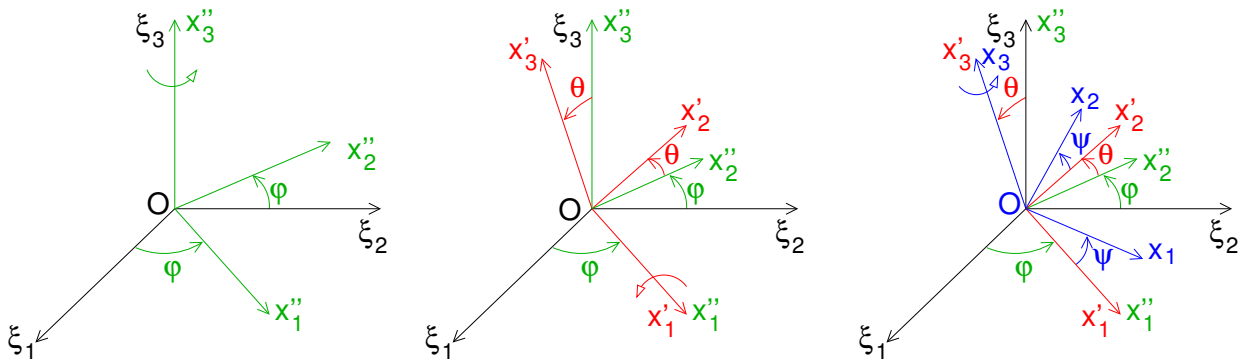
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός αντιστοιχεί στον ανάστροφο πίνακα

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \vartheta & \cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζεται ότι ίδιες σχέσεις ισχύουν και μεταξύ των μοναδιαίων των δύο συστημάτων.

Οι τρεις διαδοχικές στροφές αντιστοιχούν σε συνολική γωνιακή ταχύτητα  $\omega = \dot{\varphi} \hat{\xi}_3 + \dot{\vartheta} \hat{x}''_1 + \dot{\psi} \hat{x}_3 = \dot{\varphi} \hat{\xi}_3 + \dot{\vartheta} (\hat{\xi}_1 \cos \varphi + \hat{\xi}_2 \sin \varphi) + \dot{\psi} \hat{x}_3$ . Αυτή μπορεί να εκφραστεί στο σύστημα  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  σαν  $\omega = \omega_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + \omega_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + \omega_{\xi_3} \hat{\xi}_3$  όπου  $\omega_{\xi_i} = \omega \cdot \hat{\xi}_i$  και τα διάφορα εσωτερικά γινόμενα μπορούν να βρεθούν μέσω του πίνακα μετασχηματισμού.



Σχήμα 11.1: Οι τρεις γωνίες Euler που καθορίζουν τον προσανατολισμό του  $Ox_1x_2x_3$  ως προς το  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ : στροφή γύρω από τον άξονα  $O\xi_3$  κατά  $\varphi$ , στροφή γύρω από τον άξονα  $Ox'_1$  κατά  $\vartheta$  και στροφή γύρω από τον άξονα  $Ox''_3$  κατά  $\psi$ .

Έτσι προκύπτουν οι συνιστώσες

$$\omega_{\xi_1} = \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi, \tag{11.2}$$

$$\omega_{\xi_2} = \dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi, \tag{11.3}$$

$$\omega_{\xi_3} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta. \tag{11.4}$$

Όμοια στο  $Ox_1x_2x_3$  είναι  $\omega = \omega_1\hat{x}_1 + \omega_2\hat{x}_2 + \omega_3\hat{x}_3$  με

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta + \dot{\psi} \cos \psi, \tag{11.5}$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta - \dot{\psi} \sin \psi, \tag{11.6}$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \tag{11.7}$$

**Παράδειγμα 11.1:**

Έστω  $\hat{R} = \hat{x}_3$  το μοναδιαίο στον ημιάξονα  $Ox_3$ .

(α) Μέσω της σχέσης  $\dot{\hat{R}} = \omega \times \hat{R}$  δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα στροφής του συστήματος  $Ox_1x_2x_3$  γράφεται  $\omega = \omega_{12} + \omega_3\hat{R}$ , όπου  $\omega_{12} = \hat{R} \times \dot{\hat{R}}$ .

(β) Ποια η σχέση των σφαιρικών συντεταγμένων του  $\hat{R}$  στο σύστημα  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  με τις γωνίες Euler;

(γ) Ποια η έκφραση του  $\omega$  συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων του  $\hat{R}$  και της γωνίας  $\psi$ ;

Λύση:

(α) Το εξωτερικό γινόμενο της σχέσης  $\dot{\hat{R}} = \omega \times \hat{R}$  με  $\hat{R}$  δίνει  $\hat{R} \times \dot{\hat{R}} = \hat{R} \times (\omega \times \hat{R}) = \omega - \omega_3\hat{R}$ , επομένως η γωνιακή ταχύτητα γράφεται  $\omega = \omega_{12} + \omega_3\hat{R}$  με  $\omega_{12} = \hat{R} \times \dot{\hat{R}}$ .

(β) Ο πίνακας στροφής μεταξύ  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  και  $Ox_1x_2x_3$  δίνει  $\hat{R} = \xi_1 \sin \vartheta \sin \varphi - \xi_2 \sin \vartheta \cos \varphi + \xi_3 \cos \vartheta$ , έκφραση ίδια με αυτή που ξέρουμε για τις σφαιρικές συντεταγμένες  $\hat{R} = \xi_1 \sin \theta \cos \phi + \xi_2 \sin \theta \sin \phi + \xi_3 \cos \theta$  αν ισχύει  $\theta = \vartheta$  και  $\phi = \varphi - \pi/2$ .

(γ) Η έκφραση  $\omega = \dot{\varphi}\xi_3 + \dot{\vartheta}\hat{x}'_2 + \dot{\psi}\hat{x}_3$  με  $\varphi = \phi + \pi/2$ ,  $\xi_3 = \cos \theta \hat{R} - \sin \theta \hat{\theta}$ ,  $\vartheta = \theta$ ,  $\hat{x}'_1 = \xi_1 \cos \varphi + \xi_2 \sin \varphi = -\xi_1 \sin \phi + \xi_2 \cos \phi = \hat{\phi}$  και  $\hat{x}_3 = \hat{R}$  δίνει  $\omega = (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\hat{R} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta} + \dot{\theta} \hat{\phi}$ .

(Το μέρος  $\omega_{12} = \hat{R} \times \dot{\hat{R}}$  θα μπορούσε να βρεθεί θέτοντας  $\dot{\hat{R}} = \dot{\theta} \hat{\theta} + \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}$ , σχέση που προκύπτει από την  $dr = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$  σε σφαιρικές συντεταγμένες.)

**11.3 Κινητική ενέργεια και στροφορμή στερεού σώματος**

Η κινητική ενέργεια του στερεού σώματος είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών που το αποτελούν, δηλ.  $T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ , όπου  $v_i$  η ταχύτητα κάθε μάζας  $m_i$  ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή. Η ταχύτητα αναλύεται σαν  $v_i = v_o + \omega \times r_i$  όπως στην εξίσωση 11.1, οπότε η κινητική ενέργεια είναι

$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_o^2 + v_o \cdot (\omega \times \sum m_i r_i) + \frac{1}{2} \sum m_i (\omega \times r_i)^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 + v_o \cdot (\omega \times m r_K) + \frac{1}{2} \sum m_i r_{i\perp}^2 \omega^2$ , όπου  $r_K$  η θέση του κέντρου μάζας  $K$  ως προς το  $O$  και  $r_{i\perp}$  η απόσταση κάθε μάζας  $m_i$  από το στιγμιαίο άξονα περιστροφής που περνά από το  $O$  (και έχει τη διεύθυνση της στιγμιαίας  $\omega$ ). Ορίζοντας τη ροπή αδράνειας  $I$  ως προς αυτό το στιγμιαίο άξονα

$$I = \sum m_i r_{i\perp}^2 \quad (11.8)$$

η κινητική ενέργεια γράφεται

$$T = \frac{1}{2} m v_o^2 + v_o \cdot (\omega \times m r_K) + \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (11.9)$$

Ο πρώτος όρος οφείλεται στην μεταφορική κίνηση και ο τρίτος στην περιστροφική. Ο δεύτερος όρος, ο οποίος οφείλεται και στις δύο κινήσεις, μηδενίζεται αν επιλέξουμε σαν  $O$  είτε το κέντρο μάζας (οπότε  $r_K = 0$ ), είτε συνεχώς ακίνητο σημείο αν υπάρχει τέτοιο (οπότε  $v_o = 0$ ).

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  δεν είναι γενικά σταθερή γιατί ο άξονας περιστροφής γενικά κινείται, οπότε είναι χρήσιμο να βρούμε μια άλλη έκφραση που να συνδέει την κινητική ενέργεια μόνο με τα χαρακτηριστικά της κίνησης, δηλ. τα  $v_o$  και  $\omega$ . Αυτό γίνεται αν εκφράσουμε τα διανύσματα  $\omega$  και  $r_i$  στο σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  που είναι σταθερό πάνω στο στερεό, δηλ.  $\omega = \omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2 + \omega_3 \hat{x}_3$ ,  $r_i = x_{i1} \hat{x}_1 + x_{i2} \hat{x}_2 + x_{i3} \hat{x}_3$  και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $(A \times B)^2 = A^2 B^2 - (A \cdot B)^2 = \sum_k A_k A_k B^2 -$

$\sum_k A_k B_k \sum_j A_j B_j = \sum_{kj} (B^2 \delta_{kj} - B_k B_j) A_k A_j$  γράψουμε τον περιστροφικό όρο της κινητικής ενέργειας σαν  $\frac{1}{2} \sum m_i (\omega \times r_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{kj} I_{kj} \omega_k \omega_j$ , όπου  $I_{kj} = \sum m_i (r_i^2 \delta_{kj} - x_{ik} x_{ij})$  (ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη μάζα  $m_i$

ενώ ο δεύτερος στη συνιστώσα του διανύσματος  $r_i$ ).

Το μέγεθος  $I_{ij}$  λέγεται τανυστής αδράνειας. Μπορούμε να τον γράψουμε σαν (συμμετρικό) πίνακα

$$I = \begin{bmatrix} \sum m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) & -\sum m_i x_{i1} x_{i2} & -\sum m_i x_{i1} x_{i3} \\ -\sum m_i x_{i1} x_{i2} & \sum m_i (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) & -\sum m_i x_{i2} x_{i3} \\ -\sum m_i x_{i1} x_{i3} & -\sum m_i x_{i2} x_{i3} & \sum m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{bmatrix}. \quad (11.10)$$

Τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες του συστήματος, ενώ τα μη διαγώνια λέγονται γινόμενα αδράνειας.

Χρησιμοποιώντας τον τανυστή αδράνειας, τα στοιχεία του οποίου μένουν σταθερά καθώς το στερεό κινείται, η κινητική ενέργεια γράφεται

$$T = \frac{1}{2} m v_o^2 + v_o \cdot (\omega \times m r_K) + \frac{1}{2} \sum_{kj} I_{kj} \omega_k \omega_j. \quad (11.11)$$

Να σημειωθεί ότι παρότι τα στοιχεία του τανυστή αδράνειας και οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας εξαρτώνται όχι μόνο από την επιλογή του  $O$  αλλά και από τις κατευθύνσεις των αξόνων  $Ox_1x_2x_3$ , ο τελευταίος όρος της κινητικής ενέργειας είναι ανεξάρτητος από αυτή την επιλογή (εξαρτάται μόνο από την επιλογή του

$O$ ). Αυτό φαίνεται αν γραφεί σαν γινόμενο πινάκων  $\frac{1}{2} \sum_{kj} I_{kj} \omega_k \omega_j = \frac{1}{2} [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3] \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$ ,

το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από στροφές.

Για κάθε  $O$  μπορούν να επιλεγούν κατάλληλα οι διευθύνσεις των αξόνων  $Ox_1x_2x_3$  ώστε ο τανυστής αδράνειας να είναι διαγώνιος. Έτσι ορίζονται οι κύριοι άξονες αδράνειας, οι οποίοι αντιστοιχούν στην διαγωνοποίηση του πίνακα 11.10. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές  $I_j$  είναι οι ροπές αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες οι οποίες λέγονται και κύριες ροπές αδράνειας. Σε αυτό το σύστημα είναι λοιπόν  $I_{jk} = I_j \delta_{jk}$  και η έκφραση της κινητικής ενέργειας απλοποιείται σε

$$T = \frac{1}{2} m v_o^2 + v_o \cdot (\omega \times m r_K) + \frac{1}{2} \sum_j I_j \omega_j^2. \quad (11.12)$$

Για τον υπολογισμό των ροπών αδράνειας είναι χρήσιμο το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (ή θεώρημα του Steiner), σύμφωνα με το οποίο η ροπή αδράνειας ως προς ένα άξονα που περνά από σημείο  $O$  συνδέεται με τη ροπή αδράνειας ως προς παράλληλο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας με τη σχέση

$$I_O = I_K + m(OK_{\perp})^2 \quad (11.13)$$

όπου  $OK_{\perp}$  η απόσταση μεταξύ των αξόνων.

Η απόδειξη γίνεται με χρήση των  $I_O = \sum m_i(O\Sigma_{i\perp})^2$ ,  $I_K = \sum m_i(K\Sigma_{i\perp})^2$ , όπου  $\Sigma_i$  το σημείο της μάζας  $m_i$  και  $O\Sigma_{i\perp}$ ,  $K\Sigma_{i\perp}$  οι αποστάσεις του από τους δύο άξονες. Αντικαθιστώντας  $O\Sigma_{i\perp} = OK_{\perp} + K\Sigma_{i\perp}$  στην έκφραση της  $I_O$  βρίσκουμε  $I_O = \sum m_i(OK_{\perp})^2 + \sum m_i(K\Sigma_{i\perp})^2 + 2OK_{\perp} \cdot (\sum m_i K\Sigma_i)_{\perp}$ . Ο πρώτος όρος είναι  $m(OK_{\perp})^2$ , ο δεύτερος  $I_K$ , ενώ ο τρίτος μηδενίζεται γιατί  $\sum m_i K\Sigma_i = 0$  μιας και το  $K$  είναι το κέντρο μάζας.

Το θεώρημα γενικεύεται εύκολα για όλο τον τανυστή αδράνειας. Τα στοιχεία του τανυστή ως προς ένα σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  συνδέονται με τα αντίστοιχα του τανυστή ως προς ένα σύστημα με παράλληλους άξονες και αρχή το κέντρο μάζας  $K$  μέσω της σχέσης

$$I_{O,kj} = I_{K,kj} + m[OK^2\delta_{kj} - (OK \cdot \hat{x}_k)(OK \cdot \hat{x}_j)] \quad (11.14)$$

όπου  $OK$  η θέση του  $K$  ως προς το  $O$ .

Η απόδειξη γίνεται γράφοντας  $I_{O,kj} = \sum m_i[O\Sigma_i^2\delta_{kj} - (O\Sigma_i \cdot \hat{x}_k)(O\Sigma_i \cdot \hat{x}_j)]$ ,  $I_{K,kj} = \sum m_i[K\Sigma_i^2\delta_{kj} - (K\Sigma_i \cdot \hat{x}_k)(K\Sigma_i \cdot \hat{x}_j)]$ , όπου  $\Sigma_i$  το σημείο της μάζας  $m_i$  και  $O\Sigma_i$ ,  $K\Sigma_i$  οι θέσεις του στα δύο συστήματα, αντικαθιστώντας στην πρώτη  $O\Sigma_i = OK + K\Sigma_i$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\sum m_i K\Sigma_i = 0$ .

Η στροφορμή του στερεού σώματος ως προς οποιοδήποτε σημείο του  $O$  ορίζεται σαν  $L = \sum r_i \times m_i v_i$ , όπου  $r_i$  η θέση κάθε μάζας  $m_i$  από το  $O$  και  $v_i$  η ταχύτητά της ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή. Αναλύοντας την ταχύτητα σαν  $v_i = v_o + \omega \times r_i$  όπως στην εξίσωση 11.1, η στροφορμή γράφεται  $L = \sum m_i r_i \times v_o + \sum m_i r_i \times (\omega \times r_i)$ . Ο πρώτος όρος γράφεται  $m r_K \times v_o$  όπου  $r_K$  η θέση του κέντρου μάζας  $K$  ως προς το  $O$ . Ο δεύτερος όρος, με χρήση της ταυτότητας του διπλού εξωτερικού γινομένου  $B \times (A \times B) = B^2 A - (B \cdot A)B = B^2 \sum_k A_k \hat{x}_k - \sum_j B_j A_j \sum_k B_k \hat{x}_k = \sum_{kj} (B^2 \delta_{kj} - B_k B_j) A_j \hat{x}_k$  γράφεται  $\sum_{kj} I_{kj} \omega_j \hat{x}_k$  (ή τανυστικά  $I \cdot \omega$ ). Η στροφορμή

λοιπόν ως προς σημείο  $O$  είναι

$$L = m r_K \times v_o + \sum_{kj} I_{kj} \omega_j \hat{x}_k, \quad (11.15)$$

όπου  $\omega_j$  οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  που κινείται με το στερεό και  $I_{kj}$  ο αντίστοιχος τανυστής αδράνειας.

Ο πρώτος όρος οφείλεται στην μεταφορική κίνηση του  $O$  και μηδενίζεται αν επιλέξουμε σαν  $O$  είτε το κέντρο μάζας (οπότε  $r_K = 0$ ), είτε συνεχώς ακίνητο σημείο αν υπάρχει τέτοιο (οπότε  $v_o = 0$ ). Ο δεύτερος όρος οφείλεται στην περιστροφή γύρω από το στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $O$ . Παρότι οι συνιστώσες του εξαρτώνται από την επιλογή των αξόνων  $Ox_1x_2x_3$ , σαν διάνυσμα είναι ανεξάρτητο από αυτή την επιλογή (κάτι που φαίνεται μέσω της τανυστικής γραφής  $I \cdot \omega$ ).

Αν επιλέξουμε σύστημα με τους κύριους άξονες αδράνειας ο δεύτερος αυτός όρος απλοποιείται και παίρνουμε την έκφραση της στροφορμής

$$L = m r_K \times v_o + \sum_j I_j \omega_j \hat{x}_j. \quad (11.16)$$

Μέσω αυτής συμπεραίνουμε ότι για τις υποπεριπτώσεις όπου η περιστροφή του στερεού γίνεται γύρω από έναν κύριο άξονα αδράνειας που περνά από το  $O$  το δεύτερο μέρος της στροφορμής είναι παράλληλο με την γωνιακή ταχύτητα. Αυτό συνδέεται με το ότι οι κύριοι άξονες ορίζουν τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή αδράνειας με τις ιδιοτιμές να είναι οι  $I_j$ , οπότε αν η γωνιακή ταχύτητα είναι πάνω σε έναν από αυτούς τους άξονες, η δράση του τελεστή αδράνειας πάνω της δίνει παράλληλο διάνυσμα  $I \cdot (\omega_j \hat{x}_j) = I_j (\omega_j \hat{x}_j)$ . (Υπενθυμίζεται ότι στις περιπτώσεις που το  $O$  είναι ακίνητο ή είναι το κέντρο μάζας ο πρώτος όρος της στροφορμής μηδενίζεται.)

Χρησιμοποιώντας τη στροφορμή η κινητική ενέργεια γράφεται σαν

$$T = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} L \cdot \omega. \quad (11.17)$$

### 11.4 Ανάλυση κίνησης σαν κοχλία

Μέχρι τώρα η κίνηση του στερεού αναλύθηκε σαν επαλληλία μεταφορικής κάποιου σημείου του στερεού  $O$  και περιστροφικής γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $O$ . Εναλλακτικά η κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε περιστροφική γύρω από στιγμιαίο άξονα και μεταφορική παράλληλα στον άξονα αυτό, δηλ. κίνηση κοχλία. Η ανάλυση αυτή δεν καλύπτεται από την προηγούμενη γιατί στην κίνηση κοχλία ο άξονας περιστροφής γενικά δεν περνά από συγκεκριμένο σημείο του στερεού. Η θέση του αλλάζει γενικότερα με το χρόνο (δεν περιστρέφεται μόνο περνώντας πάντα από συγκεκριμένο σημείο του στερεού όπως στην προηγούμενη θεώρηση), επίσης μπορεί να βρίσκεται ακόμα και εκτός του στερεού.

Καταρχάς πρέπει να αποδειχθεί ότι ένας τέτοιος άξονας πάντα υπάρχει. Πράγματι, αν η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα είναι  $\omega$  και ένα τυχαίο σημείο του στερεού  $\Sigma$  έχει στιγμιαία ταχύτητα  $v_\Sigma$  ως προς αδρανειακό παρατηρητή, αναλύοντας την ταχύτητα αυτή παράλληλα και κάθετα στην  $\omega$  σαν  $v_\Sigma = v_{\parallel} + v_{\Sigma\perp}$  με  $v_{\parallel} = \frac{v_\Sigma \cdot \omega}{\omega^2} \omega$  και  $v_{\Sigma\perp} = \omega \times \frac{v_\Sigma \times \omega}{\omega^2}$ , η  $v_{\Sigma\perp}$  είναι καθαρά περιστροφική  $v_{\Sigma\perp} = \omega \times O\Sigma$  με  $O\Sigma = \frac{v_\Sigma \times \omega}{\omega^2}$  και η τελευταία σχέση ορίζει το σημείο  $O$  από το οποίο περνά ο άξονας περιστροφής. Κάθε άλλο σημείο του στερεού  $\Sigma'$  έχει ταχύτητα  $v_{\Sigma'}$  η οποία, χρησιμοποιώντας το μη-αδρανειακό σύστημα με αρχή το  $\Sigma$  γράφεται σαν  $v_{\Sigma'} = v_\Sigma + \omega \times \Sigma\Sigma'$ . Αντικαθιστώντας την ανάλυση της  $v_\Sigma$  βρίσκουμε  $v_{\Sigma'} = v_{\parallel} + \omega \times (O\Sigma + \Sigma\Sigma') = v_{\parallel} + \omega \times O\Sigma'$ , δηλ. και αυτή αναλύεται σε μεταφορική κατά μήκος του  $\omega$ , με ίδια ταχύτητα όπως το  $\Sigma$ , και περιστροφική γύρω από τον ίδιο άξονα που περνά από το  $O$  (ο άξονας δεν εξαρτάται από το σημείο  $\Sigma'$ ). Σε κάθε στιγμή λοιπόν υπάρχει μοναδικός άξονας περιστροφής που περνά από συγκεκριμένο σημείο  $O$  και συγκεκριμένη ταχύτητα όλου του στερεού παράλληλα στον άξονα αυτό.

Γράφοντας την ταχύτητα κάθε σημείου του στερεού σαν

$$v_i = v_{\parallel} + \omega \times r_i \quad (11.18)$$

και ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης ανάλυσης καταλήγουμε στο ότι η στροφορμή ως προς το σημείο  $O$  του στιγμιαίου άξονα γράφεται

$$L = mr_K \times v_{\parallel} + \sum_{kj} I_{kj} \omega_j \hat{x}_k \quad (11.19)$$

και η κινητική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} L \cdot \omega. \quad (11.20)$$

Σημαντική διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη ανάλυση είναι ότι τώρα ο τανυστής αδράνειας δεν μένει σταθερός με το χρόνο, γιατί το σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  γενικά κινείται ως προς το στερεό (τόσο η αρχή του όσο και οι κατευθύνσεις των αξόνων οι οποίες μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα – ο μόνος περιορισμός είναι το  $O$  να βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής που είναι μοναδικός κάθε στιγμή).

Η ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου απλουστεύεται σημαντικά στην επίπεδη κίνηση, όταν δηλ. κάθε σημείο του στερεού κινείται σε σταθερό επίπεδο παράλληλο σε ένα επίπεδο αναφοράς, που σημαίνει ότι η  $\omega$  έχει σταθερή διεύθυνση κάθετα στο επίπεδο αναφοράς και  $v_{\parallel} = 0$ . Η κίνηση του στερεού είναι τότε σε κάθε στιγμή καθαρά περιστροφική γύρω από στιγμιαίο άξονα. Όπως θα δούμε σε παραδείγματα στη συνέχεια η επίπεδη κύλιση στερεού χωρίς ολίσθηση είναι μία τέτοια περίπτωση, με τον άξονα περιστροφής να περνά σε κάθε στιγμή από τα σημεία επαφής του στερεού τα οποία είναι στιγμιαία ακίνητα (και να μην μένει σταθερός ως προς το στερεό).

### 11.5 Εξίσωση κίνησης

Ένας τρόπος να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης είναι να ακολουθήσουμε μέθοδο Αναλυτικής Μηχανικής (π.χ. Λαγκρανζιανό φορμαλισμό), ο οποίος προϋποθέτει να βρούμε την έκφραση της κινητικής ενέργειας του στε-

ρεού συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων. Αυτό μπορεί να γίνει με έναν από τους τρόπους που προαναφέρθηκαν και συνοψίζονται παρακάτω.

Αν ασκούνται μη-συντηρητικές δυνάμεις στο στερεό, ή αν θέλουμε να βρούμε ροπές ή δυνάμεις αντιδράσεων δεσμών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Νευτώνεια Μηχανική. Πέραν του νόμου Νεύτωνα για το κέντρο μάζας  $m\ddot{v}_K = \Sigma F^{εξ}$ , για τη συνολική στροφορμή ως προς οποιοδήποτε σημείο  $O$  ισχύει

$$\frac{dL_O}{dt} + v_o \times mv_K = M_O, \quad (11.21)$$

όπου  $v_o$  και  $v_K$  οι ταχύτητες του σημείου  $O$  και του κέντρου μάζας  $K$  ως προς το αδρανειακό σύστημα και  $M_O$  η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το  $O$ .

### 11.5.1 Ανάλυση ως προς κάποιο σημείο του στερεού

Αν επιλέξουμε να αναλύσουμε την κίνηση σε μεταφορική κάποιο συγκεκριμένου σημείου  $O$  του στερεού και περιστροφική γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $O$ , έχουμε βρει ότι

$$L_O = mOK \times v_o + I_O \cdot \omega \quad (11.22)$$

(όπου ο τελευταίος όρος μπορεί να υπολογιστεί σε οποιοδήποτε σύστημα  $Ox_1x_2x_3$  που κινείται μαζί με το στερεό, είτε αυτό είναι το σύστημα των κύριων αξόνων είτε όχι) και

$$T = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}L_O \cdot \omega. \quad (11.23)$$

Αντικαθιστώντας τη στροφορμή στην εξίσωση κίνησης 11.21 και χρησιμοποιώντας την  $v_K = v_o + \frac{d(OK)}{dt}$  βρίσκουμε μια πιο εύχρηστη μορφή της εξίσωσης κίνησης

$$\frac{d}{dt}(I_O \cdot \omega) + mOK \times a_o = M_O. \quad (11.24)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ χρονικής παραγώγου για αδρανειακό και μη-αδρανειακό παρατηρητή (που κινείται μαζί με το στερεό) μπορούμε να γράψουμε τον πρώτο όρο σαν  $\frac{d}{dt}(I_O \cdot \omega) = \left[ \frac{d}{dt}(I_O \cdot \omega) \right]_{\sigma} + \omega \times (I_O \cdot \omega) = I_O \cdot \dot{\omega} + \omega \times (I_O \cdot \omega)$ , οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης

$$I_O \cdot \dot{\omega} + \omega \times (I_O \cdot \omega) + mOK \times a_o = M_O. \quad (11.25)$$

Να σημειωθεί ότι η τελευταία εξίσωση ισχύει ακόμα και αν το  $O$  είναι στιγμιαία (αλλά όχι συνεχώς) ακίνητο. Στην περίπτωση αυτή παρότι στον υπολογισμό της στιγμιαίας στροφορμής μπορούμε να θέσουμε  $v_o = 0$ , όταν υπολογίζουμε την παράγωγο της στροφορμής ο όρος με την  $v_o$  πρέπει να κρατηθεί γιατί υπάρχει γενικά μη-μηδενική επιτάχυνση.

Συνηθέστερα επιλέγουμε σαν σημείο  $O$  το κέντρο μάζας ή ακίνητο σημείο (αν υπάρχει) οπότε ακολουθούμε τις εξισώσεις των επόμενων υποκεφαλαίων.

### 11.5.2 Ανάλυση ως προς το κέντρο μάζας

Αν επιλέξουμε να αναλύσουμε την κίνηση σε μεταφορική του κέντρου μάζας  $K$  και περιστροφική γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $K$  (δηλ. στη θέση του  $O$  έχουμε το  $K$ ), ισχύουν

$$L_K = I_K \cdot \omega \quad (11.26)$$

(όπου ο τελευταίος όρος μπορεί να υπολογιστεί σε οποιοδήποτε σύστημα  $Kx_1x_2x_3$  που κινείται μαζί με το στερεό, είτε αυτό είναι το σύστημα των κύριων αξόνων είτε όχι) και

$$T = \frac{1}{2}mv_K^2 + \frac{1}{2}L_K \cdot \omega. \quad (11.27)$$

Αντικαθιστώντας τη στροφορμή στην εξίσωση κίνησης 11.21 βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}(I_K \cdot \omega) = M_K, \quad (11.28)$$

η οποία όμοια με πριν μπορεί να γραφεί σαν

$$I_K \cdot \dot{\omega} + \omega \times (I_K \cdot \omega) = M_K. \quad (11.29)$$

### 11.5.3 Ανάλυση ως προς ακίνητο σημείο του στερεού

Αν υπάρχει σημείο του στερεού  $O$  το οποίο είναι συνεχώς ακίνητο η κίνηση είναι καθαρά περιστροφική γύρω από άξονα που περνά από το  $O$  (ο οποίος βέβαια μπορεί να στρέφεται με το χρόνο). Θέτοντας  $v_o = 0$  στις γενικές σχέσεις βρίσκουμε

$$L_O = I_O \cdot \omega \quad (11.30)$$

(όπου ο τελευταίος όρος μπορεί να υπολογιστεί σε οποιοδήποτε σύστημα  $Ox_1x_2x_3$ , είτε αυτό είναι το σύστημα των κύριων αξόνων είτε όχι) και

$$T = \frac{1}{2} L_O \cdot \omega. \quad (11.31)$$

Αντικαθιστώντας τη στροφορμή στην εξίσωση κίνησης 11.21 βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}(I_O \cdot \omega) = M_O, \quad (11.32)$$

η οποία όμοια με πριν μπορεί να γραφεί σαν

$$I_O \cdot \dot{\omega} + \omega \times (I_O \cdot \omega) = M_O. \quad (11.33)$$

### 11.5.4 Ανάλυση κίνησης σαν κοχλία

Αν επιλέξουμε να αναλύσουμε την κίνηση σε περιστροφική γύρω από στιγμιαίο άξονα και μεταφορική παράλληλα στον άξονα αυτό, δηλ. κίνηση κοχλία, πρέπει πρώτα να βρούμε ποιος είναι ο άξονας, ένα σημείο του  $O$  και πως αυτό κινείται στο χρόνο, δηλ. την ταχύτητά του  $v_o$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε βρει ότι

$$L_O = m\mathbf{OK} \times v_{\parallel} + I_O \cdot \omega \quad (11.34)$$

(όπου ο τελευταίος όρος μπορεί να υπολογιστεί σε οποιοδήποτε σύστημα  $Ox_1x_2x_3$ ) και

$$T = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} L_O \cdot \omega. \quad (11.35)$$

Αντικαθιστώντας τη στροφορμή στην εξίσωση κίνησης 11.21 και χρησιμοποιώντας την  $\frac{d(\mathbf{OK})}{dt} = v_K - v_o$  βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}(I_O \cdot \omega) + m(v_K - v_o) \times v_{\parallel} + m\mathbf{OK} \times \dot{v}_{\parallel} + v_o \times m v_K = M_O, \quad (11.36)$$

όπου πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι και ο τανυστής αδράνειας αλλάζει με το χρόνο.

## 11.6 Παραδείγματα κίνησης στερεού σώματος

### 11.6.1 Περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα

Στις περιπτώσεις αυτές η ανάλυση γίνεται εύκολα ως προς ακίνητο σημείο του στερεού και σαν τέτοιο μπορεί να επιλεγεί σημείο  $O$  του σταθερού άξονα. Αν επιλέξουμε άξονες  $Ox_1x_2x_3$  με  $Ox_3$  τον άξονα περιστροφής και  $I_{kj}$  είναι ο τανυστής αδράνειας σε αυτό το σύστημα, η γωνιακή ταχύτητα είναι  $\omega = \dot{\phi} \hat{x}_3$ , η στροφορμή ως προς το  $O$  είναι  $L_O = (I_{13}\hat{x}_1 + I_{23}\hat{x}_2 + I_{33}\hat{x}_3)\dot{\phi}$  και η κινητική ενέργεια  $T = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\phi}^2$ .



**Παράδειγμα 11.2:**

Φυσικό εκκρεμές αποτελείται από στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα χωρίς τριβές.

- (α) Ποια η εξίσωση κίνησης;
- (β) Ποια η δύναμη και η ροπή που ασκεί ο άξονας στο στερεό;

Λύση:

(α) Επιλέγουμε  $Oz = Ox_3$  τον οριζόντιο άξονα περιστροφής με αρχή  $O$  το σημείο του που βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το κέντρο μάζας και γενικευμένη συντεταγμένη την γωνία  $\phi$  μεταξύ  $OK$  και  $g$ , ώστε  $\omega = \dot{\phi}\hat{z}$ . Η κινητική ενέργεια είναι  $T = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\phi}^2$  και η βαρυτική δυναμική  $V = - \int dm g \cdot r = -mg \cdot r_K = -mg\ell \cos \phi$  όπου  $\ell = OK$ . Η Λαγκρανζιανή είναι  $L = T - V = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\phi}^2 + mg\ell \cos \phi$  και η εξίσωση κίνησης

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \Leftrightarrow I_{33}\ddot{\phi} = -mg\ell \sin \phi.$$

Αφού  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας  $E = \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\phi}^2 - mg\ell \cos \phi$  (όπως αναμέναμε είναι το  $T + V = E$ ), το οποίο αποτελεί μια ισοδύναμη έκφραση της εξίσωσης κίνησης.

(β) Από  $m\ddot{r}_K = N + mg$  βρίσκουμε τη συνολική δύναμη που ασκεί ο άξονας στο στερεό  $N$ . Επιλέγοντας σταθερούς άξονες  $O\xi\eta$  στο κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το  $K$  με  $O\xi$  τον κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω είναι  $r_K = \ell \cos \phi \hat{\xi} + \ell \sin \phi \hat{\eta}$  και βρίσκουμε  $N = -m(g + \ell \ddot{\phi} \sin \phi + \ell \dot{\phi}^2 \cos \phi) \hat{\xi} + m(\ell \ddot{\phi} \cos \phi - \ell \dot{\phi}^2 \sin \phi) \hat{\eta}$ . Η δύναμη αυτή είναι κατανεμημένη πάνω στον άξονα. Η ροπή  $M_N$  που ασκεί μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση 11.33 η οποία, θέτοντας τη ροπή του βάρους  $\int r \times dm g = r_K \times mg$ , δίνει  $M_N = I_O \cdot \dot{\omega} + \omega \times (I_O \cdot \omega) - r_K \times mg = (I_{13}\hat{x}_1 + I_{23}\hat{x}_2 + I_{33}\hat{x}_3)\ddot{\phi} + \dot{\phi}\hat{x}_3 \times (I_{13}\hat{x}_1 + I_{23}\hat{x}_2 + I_{33}\hat{x}_3)\dot{\phi} + mg\ell \sin \phi \hat{x}_3 = (I_{13}\ddot{\phi} - I_{23}\dot{\phi}^2)\hat{x}_1 + (I_{23}\ddot{\phi} + I_{13}\dot{\phi}^2)\hat{x}_2 + (I_{33}\ddot{\phi} + mg\ell \sin \phi)\hat{x}_3$ . Δεν έχει βέβαια συνιστώσα πάνω στον άξονα, δηλ. η  $\hat{x}_3$  συνιστώσα είναι μηδενική, κάτι που θα έδινε την εξίσωση κίνησης  $I_{33}\ddot{\phi} = -mg\ell \sin \phi$  αν δεν την είχαμε βρει μέσω της Λαγκρανζιανής.

Τόσο η δύναμη όσο και η ροπή μπορούν να βρεθούν σαν συνάρτηση της γωνίας  $\phi$  αν αντικαταστήσουμε την  $\ddot{\phi}$  από την εξίσωση κίνησης και την  $\dot{\phi}^2$  από το ολοκλήρωμα ενέργειας.

Στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής είναι ένας από τους κύριους άξονες αδράνειας του στερεού που περνούν από το  $O$  η ροπή είναι μηδενική (κάτι που φαίνεται άμεσα αν οι κάθετοι στον άξονα περιστροφής επιλεγούν οι άλλοι δύο κύριοι άξονες οπότε τα μη-διαγώνια στοιχεία του τανυστή αδράνειας είναι μηδενικά, αλλά προκύπτει και από την ιδιότητα του κύριου άξονα, ότι αν η γωνιακή ταχύτητα είναι πάνω του η στροφορμή είναι επίσης πάνω του, δηλ. ισχύει  $L_O = I_{33}\omega$  και  $I_{13}\hat{x}_1 + I_{23}\hat{x}_2 = 0$ ).

**Παράδειγμα 11.3:**

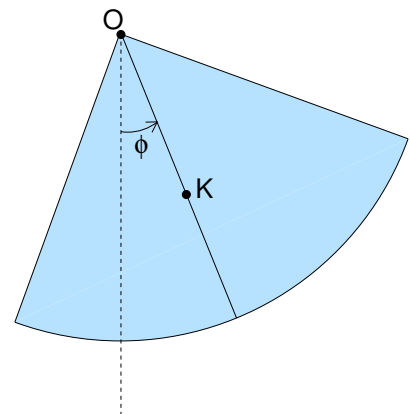
Ομογενής πλάκα μικρού πάχους αποτελεί το ένα τέταρτο κυκλικού δίσκου ακτίνας  $R$  και κέντρου  $O$ . Αν αναρτήσουμε την πλάκα από το  $O$  ώστε να εκτελεί μικρές ταλαντώσεις σε κατακόρυφο επίπεδο (φυσικό εκκρεμές) ποια θα είναι η περίοδος τους;

Για να απαντήσετε βρείτε πρώτα:

- (α) Τη ροπή αδράνειας για άξονα κάθετο στην πλάκα που περνά από το  $O$ .
- (β) Τη θέση του κέντρου μάζας  $K$ .
- (γ) Την έκφραση της κινητικής και δυναμικής ενέργειας της πλάκας συναρτήσει της γωνίας  $\phi$  που σχηματίζει η ευθεία  $OK$  με την κατακόρυφη.
- (δ) Τη Λαγκρανζιανή και την εξίσωση κίνησης για την γενικευμένη συντεταγμένη  $\phi$ .
- (ε) Την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κατακόρυφη.

Λύση:

(α) Αν  $m$  η μάζα της πλάκας η επιφανειακή πυκνότητά της είναι  $\sigma = \frac{m}{\pi R^2/4}$ . Χρησιμοποιώντας πολικές συ-



ντεταγμένες σε σύστημα στερεά συνδεδεμένο με την πλάκα, με αρχή στο  $O$  και  $x$ - $y$  ημιάξονες στις κάθετες πλευρές η στοιχειώδης μάζα που αντιστοιχεί σε επιφάνεια  $da = \omega d\omega d\phi$  είναι  $dm = \sigma da$  και η ροπή αδράνειας ως προς το  $O$  είναι  $I_O = \int \omega^2 dm = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\omega=0}^R \omega^2 \frac{m}{\pi R^2/4} \omega d\omega d\phi = \frac{mR^2}{2}$ .

(β) Η θέση του κέντρου μάζας  $K$  είναι  $r_K = \frac{1}{m} \int r dm$ . Στο σύστημα  $Oxy$  που προαναφέρθηκε είναι  $r = \omega \cos \phi \hat{x} + \omega \sin \phi \hat{y}$  οπότε οι συντεταγμένες του  $K$  είναι  $x_K = \frac{1}{m} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\omega=0}^R \omega \cos \phi \frac{m}{\pi R^2/4} \omega d\omega d\phi = \frac{4}{3\pi} R$  και όμοια  $y_K = \frac{4}{3\pi} R$ . Επομένως το  $K$  βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της ορθής γωνίας της πλάκας και απέχει απόσταση  $\ell = \sqrt{x_K^2 + y_K^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R$  από το  $O$ .

(γ) Αφού το στερεό περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που περνά από το  $O$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega = \dot{\phi}$  η κινητική του ενέργεια είναι  $T = \frac{1}{2} I_O \dot{\phi}^2$ .

Η δυναμική ενέργεια είναι  $V = - \int dm \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = -mg \cdot r_K = -mg\ell \cos \phi$ .

(δ) Η Λαγκρανζιανή είναι  $L = T - V = \frac{1}{2} I_O \dot{\phi}^2 + mg\ell \cos \phi$  και η εξίσωση κίνησης  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \Leftrightarrow I_O \ddot{\phi} = -mg\ell \sin \phi$ .

(ε) Για μικρές ταλαντώσεις  $|\phi| \ll 1$  είναι  $\sin \phi \approx \phi$  και η εξίσωση κίνησης γίνεται  $\ddot{\phi} + \frac{mg\ell}{I_O} \phi = 0$ , δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα  $\Omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_O}}$  και περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mg\ell}}$ . Αντικαθιστώ-

ντας τα  $I_O$  και  $\ell$  προκύπτει  $T = \frac{3^{1/2} \pi^{3/2}}{2^{3/4}} \sqrt{\frac{R}{g}}$ .

#### Παράδειγμα 11.4:

Έστω στην κίνηση του φυσικού εκκρεμούς του παραδείγματος 11.2 υπάρχουν τριβές στο σημείο στήριξης που ασκούν ροπή  $-\lambda\omega$ . Ποια είναι η εξίσωση κίνησης για την γωνία  $\phi$ ;

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει από την  $\hat{z}$  συνιστώσα της  $\frac{dL_O}{dt} = M_O$  όπου  $L_O \hat{z} = I_O \dot{\phi}$  η  $\hat{z}$  συνιστώσα της στροφορμής ως προς το  $O$  και  $M_O = M_N - \lambda \dot{\phi} \hat{z} + r_K \times mg = M_N + (-\lambda \dot{\phi} - mg\ell \sin \phi) \hat{z}$  η συνολική ροπή ως προς το  $O$ , όπου  $M_N$  η ροπή της κάθετης αντίδρασης που δεν έχει  $\hat{z}$  συνιστώσα. Η αντικατάσταση δίνει εξίσωση κίνησης  $I_O \ddot{\phi} + \lambda \dot{\phi} + mg\ell \sin \phi = 0$ .

#### 11.6.2 Επίπεδη κίνηση

Επίπεδη λέγεται η κίνηση στερεού σώματος όταν κάθε σημείο του κινείται σε σταθερό επίπεδο παράλληλο σε ένα επίπεδο αναφοράς το οποίο συνήθως επιλέγουμε να περιέχει το κέντρο μάζας, ενώ η  $\omega$  έχει σταθερή διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο αναφοράς. Αρκεί να μελετηθεί η κίνηση της τομής του στερεού με το επίπεδο αναφοράς.

Προτιμάται η ανάλυση της κίνησης ως προς το κέντρο μάζας, αλλά εξίσου βολική είναι και η ανάλυση της κίνησης σαν καθαρά περιστροφική γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνά από σημείο  $O$  του επιπέδου αναφοράς, το οποίο λέγεται στιγμιαίος πόλος της κίνησης (κίνηση κοχλία, αλλά με  $v_{||} = 0$ ).

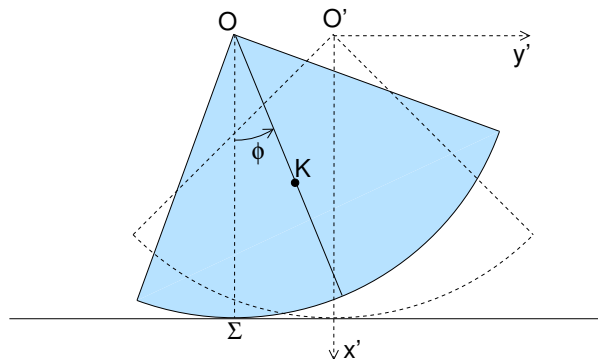
#### Παράδειγμα 11.5:

Έστω η πλάκα του παραδείγματος 11.3 ακουμπά σε οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να κινείται χωρίς να ολισθαίνει. Η θέση της καθορίζεται πλήρως από την γωνία  $\phi$  που σχηματίζει η ευθεία  $OK$  με την κατακόρυφο.

Βρείτε την εξίσωση κίνησης για την γενικευμένη συντεταγμένη  $\phi$  με τρεις τρόπους:  
 (α) Θεωρώντας την κίνηση καθαρά περιστροφική γύρω από το στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $\Sigma$ .

(β) Θεωρώντας την κίνηση μεταφορική του  $O$  και στροφή γύρω από το  $O$ .

(γ) Θεωρώντας την κίνηση μεταφορική του  $K$  και στροφή γύρω από το  $K$ .



Λύση:

Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι  $\omega = \dot{\phi}\hat{z}$  (ίδια σε όλες τις ακόλουθες περιπτώσεις). Επίσης η δυναμική ενέργεια είναι  $V = -mg \cdot OK = -mg\ell \cos \phi$ . Αυτό που διαφοροποιείται είναι ο υπολογισμός της κινητικής ενέργειας.

(α) Η κινητική ενέργεια είναι  $T = \frac{1}{2}I_{\Sigma}\omega^2$  όπου  $I_{\Sigma}$  η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτό. Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων είναι  $I_{\Sigma} = I_K + m(K\Sigma)^2$  και  $I_O = I_K + m\ell^2$ . Γνωρίζουμε την  $I_O$ , την απόσταση  $\ell$  και ότι  $(K\Sigma)^2 = R^2 + \ell^2 - 2R\ell \cos \phi$  (από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο  $OK\Sigma$  ή γράφοντας το  $\Sigma K = \Sigma O + OK = (-R + \ell \cos \phi)\hat{x}' + \ell \sin \phi \hat{y}'$  και παίρνοντας το μέτρο). Άρα  $I_K = I_O - m\ell^2$  και  $I_{\Sigma} = I_K + m(K\Sigma)^2 = I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)$ .

Η κινητική ενέργεια είναι λοιπόν  $T = \frac{1}{2} [I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)] \omega^2$ .

Η Λαγκρανζιανή είναι  $L = T - V = \frac{1}{2} [I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)] \dot{\phi}^2 + mg\ell \cos \phi$  και δίνει εξίσωση κίνησης

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \Leftrightarrow [I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)] \ddot{\phi} + mR\ell \sin \phi \dot{\phi}^2 = -mg\ell \sin \phi.$$

(Προφανώς η εξίσωση αυτή ισχύει για  $|\phi| < \pi/4$  ώστε το καμπύλο μέρος της πλάκας να ακουμπά στο οριζόντιο επίπεδο.)

(β) Η κινητική ενέργεια είναι  $T = \frac{1}{2}mv_o^2 + v_o \cdot (\omega \times mr_K) + \frac{1}{2}I_O\omega^2$ , όπου  $r_K = \ell \cos \phi \hat{x}' + \ell \sin \phi \hat{y}'$  η θέση του  $K$  ως προς το  $O$  και  $v_o$  η ταχύτητα του  $O$  ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $O'x'y'z$ . Αυτή βρίσκεται από την απαίτηση το σημείο  $\Sigma$  του στερεού να είναι ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $O'x'y'z$  (συνθήκη κύλισης), δηλ.  $v_{\Sigma} = v_o + \omega \times O\Sigma = 0 \Leftrightarrow v_o = \omega \times \Sigma O$ . Αντικαθιστώντας  $\Sigma O = -R\hat{x}'$  βρίσκουμε  $v_o = -R\dot{\phi}\hat{y}'$ . Θεωρώντας ότι για  $\phi = 0$  τα  $O$  και  $O'$  ταυτίζονται η συνθήκη κύλισης ολοκληρώνεται και δίνει  $O'O = -R\dot{\phi}\hat{y}'$ .

Η αντικατάσταση στην έκφραση της κινητικής ενέργειας δίνει  $T = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - mR\ell\omega^2 \cos \phi + \frac{1}{2}I_O\omega^2$ , ίδιο αποτέλεσμα με πριν (οπότε όμοια βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης).

(γ) Η κινητική ενέργεια είναι  $T = \frac{1}{2}mv_K^2 + \frac{1}{2}I_K\omega^2$ , δηλ. χρειαζόμαστε την ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $O'x'y'z$ . Αφού το  $\Sigma$  είναι στιγμιαία ακίνητο (συνθήκη κύλισης), αυτή είναι ίση με την ταχύτητα του  $K$  ως προς το  $\Sigma$ , δηλ.  $v_K = \omega \times \Sigma K$ . Έτσι βρίσκουμε  $v_K = -\ell\dot{\phi} \sin \phi \hat{x}' + (-R + \ell \cos \phi)\dot{\phi} \hat{y}'$  και  $v_K^2 = (R^2 + \ell^2 - 2R\ell \cos \phi)\dot{\phi}^2$ . Η αντικατάσταση στην έκφραση της κινητικής ενέργειας (μαζί με την  $I_K = I_O - m\ell^2$ ) δίνει  $T = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 - 2R\ell \cos \phi) + \frac{1}{2}I_O\omega^2$ , ίδιο αποτέλεσμα με πριν (οπότε όμοια βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης).

**Παράδειγμα 11.6:**

Έστω η πλάκα του παραδείγματος 11.5 κυλιέται χωρίς ολίσθηση, αλλά υπάρχει αντίσταση κύλισης που ασκεί ροπή  $-\lambda\dot{\phi}\hat{z}$  ως προς το  $\Sigma$ . Βρείτε την εξίσωση κίνησης για τη συντεταγμένη  $\phi$ .

Λύση:

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα 11.5 υπάρχουν τρεις εναλλακτικοί τρόποι:

Α' τρόπος: Θεωρώντας την κίνηση καθαρά περιστροφική γύρω από το στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $\Sigma$ , είναι  $\omega = \dot{\phi}\hat{z}$ ,  $I_{\Sigma} \cdot \omega = I_{\Sigma}\dot{\phi}\hat{z}$  (γιατί  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ ),  $v_{\parallel} = 0$  και η εξίσωση κίνησης 11.36 γράφεται

$I_{\Sigma}\ddot{\phi}\hat{z} + \dot{I}_{\Sigma}\dot{\phi}\hat{z} + v_{\Sigma} \times mv_K = M_{\Sigma}$ . Εδώ το σημείο  $\Sigma$  δεν ακολουθεί την κίνηση του στερεού, αλλά είναι πάντα το σημείο επαφής με το οριζόντιο επίπεδο, το οποίο έχει ταχύτητα  $v_{\Sigma} = -R\dot{\phi}\hat{y}'$  (ίδια με αυτή του  $O$ ). Επίσης το κέντρο μάζας έχει ταχύτητα  $v_K = \omega \times \Sigma K$  με  $\Sigma K = (-R + \ell \cos \phi)\hat{x}' + \ell \sin \phi\hat{y}'$ , δηλ.  $v_K = -\ell\dot{\phi} \sin \phi \hat{x}' + (-R + \ell \cos \phi)\dot{\phi}\hat{y}'$  και  $v_{\Sigma} \times mv_K = -mR\ell \sin \phi \dot{\phi}^2 \hat{z}$ .

Η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το  $\Sigma$  είναι  $M_{\Sigma} = -\lambda\dot{\phi}\hat{z} + \Sigma K \times mg$  (η στατική τριβή έχει μηδενική ροπή ως προς το  $\Sigma$  ενώ η ροπή της κάθετης αντίδρασης είναι ίση με  $-\lambda\dot{\phi}\hat{z}$ ). Είναι  $g = g\hat{x}'$  οπότε η ροπή του βάρους προκύπτει  $-mg\ell \sin \phi$ . Έτσι η εξίσωση κίνησης γράφεται  $I_{\Sigma}\ddot{\phi} + \dot{I}_{\Sigma}\dot{\phi} - mR\ell \sin \phi \dot{\phi}^2 = -\lambda\dot{\phi} - mg\ell \sin \phi$ . Αντικαθιστώντας  $I_{\Sigma} = I_K + m(K\Sigma)^2 = I_O - m\ell^2 + m(K\Sigma)^2 = I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)$  βρίσκουμε τελικά  $[I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)]\ddot{\phi} + mR\ell \sin \phi \dot{\phi}^2 = -\lambda\dot{\phi} - mg\ell \sin \phi$ .

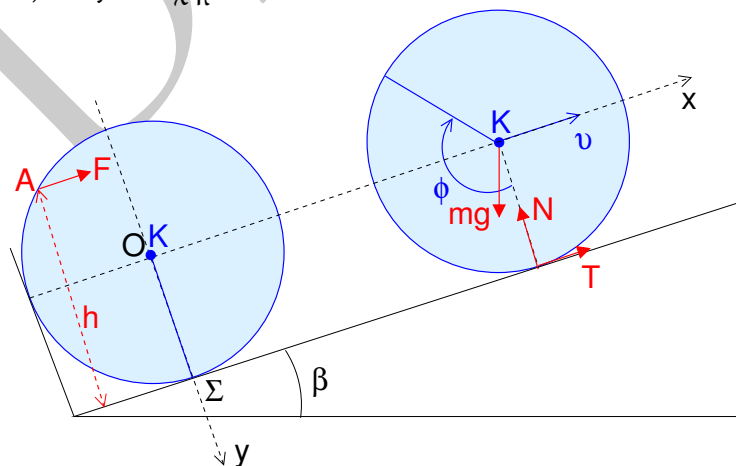
Β' τρόπος: Αν θεωρήσουμε την κίνηση μεταφορική του  $O$  και στροφή γύρω από το  $O$  η εξίσωση κίνησης 11.25 είναι  $I_O\ddot{\phi}\hat{z} + mOK \times a_o = M_O$  όπου  $M_O$  η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το  $O$ , στην οποία πρέπει αφενός να βρούμε τη νέα έκφραση της ροπής της αντίστασης και αφετέρου να λάβουμε υπόψη τη συνεισφορά της στατικής τριβής. Αυτά παρακάμπτονται αναλύοντας το διάνυσμα από το  $O$  μέχρι το σημείο εφαρμογής κάθε δύναμης σε  $O\Sigma$  συν το διάνυσμα από το  $\Sigma$  μέχρι το σημείο εφαρμογής και χρησιμοποιώντας τον νόμο Νεύτωνα  $\Sigma F = ma_K$ , οπότε μπορούμε να γράψουμε  $M_O = O\Sigma \times \Sigma F + M_{\Sigma} = O\Sigma \times ma_K + M_{\Sigma}$ . Αντικαθιστώντας  $OK = \ell \cos \phi\hat{x}' + \ell \sin \phi\hat{y}'$ ,  $a_o = -R\ddot{\phi}\hat{y}'$ ,  $v_K = v_o + \omega \times OK = -\ell\dot{\phi} \sin \phi\hat{x}' + (-R + \ell \cos \phi)\dot{\phi}\hat{y}'$  και  $O\Sigma \times ma_K = mR[(-R + \ell \cos \phi)\ddot{\phi} - \ell\dot{\phi}^2 \sin \phi]\hat{z}$  βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης  $[I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)]\ddot{\phi} + mR\ell \dot{\phi}^2 \sin \phi = -\lambda\dot{\phi} - mg\ell \sin \phi$ .

Γ' τρόπος: Αν θεωρήσουμε την κίνηση μεταφορική του  $K$  και στροφή γύρω από το  $K$  η εξίσωση κίνησης 11.29 είναι  $I_K\ddot{\phi}\hat{z} = M_K$  όπου  $M_K$  η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας  $K$ . Αυτή βρίσκεται αναλύοντας το διάνυσμα από το  $K$  μέχρι το σημείο εφαρμογής κάθε δύναμης σε  $K\Sigma$  συν το διάνυσμα από το  $\Sigma$  μέχρι το σημείο εφαρμογής και χρησιμοποιώντας τον νόμο Νεύτωνα  $\Sigma F = ma_K$ , οπότε μπορούμε να γράψουμε  $M_K = K\Sigma \times \Sigma F + M_{\Sigma} = K\Sigma \times ma_K + M_{\Sigma}$ . Αντικαθιστώντας  $K\Sigma = (R - \ell \cos \phi)\hat{x}' - \ell \sin \phi\hat{y}'$ ,  $v_K = v_o + \omega \times OK = -\ell\dot{\phi} \sin \phi\hat{x}' + (-R + \ell \cos \phi)\dot{\phi}\hat{y}'$ ,  $a_K = \ddot{v}_K$  και  $I_K = I_O - m\ell^2$  βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης  $[I_O + m(R^2 - 2R\ell \cos \phi)]\ddot{\phi} + mR\ell \dot{\phi}^2 \sin \phi = -\lambda\dot{\phi} - mg\ell \sin \phi$ .

### Παράδειγμα 11.7:

Μία ομογενής μπάλα μπιλιάρδου μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$  είναι ακίνητη στο κατώτερο σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης  $\beta = \pi/6$ . Οι συντελεστές στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης μεταξύ μπάλας και επιπέδου είναι ίσοι μεταξύ τους, με τιμή  $\mu = 1/\sqrt{3}$ .

Με μία στέκα ασκούμε στη μπάλα στιγμιαία ώθηση  $P(= F \Delta t)$  παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο και σε απόσταση  $h$  πάνω από αυτό, όπως στο σχήμα.



(α) Ποια η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της  $K$ ;

(β) Τι αρχική ταχύτητα και τι περιστροφή αποκτά η μπάλα αμέσως μετά τη ώθηση;

(γ) Πως θα εξελιχθεί η κίνηση ανάλογα με την αρχική ταχύτητα του σημείου  $\Sigma$ ; Με ποια ταχύτητα θα επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας η μπάλα;

Λύση:

(α)  $I = \int \omega^2 dm$  με  $dm = \rho d\tau = \frac{m}{4\pi R^3/3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  και  $\omega = r \sin \theta$ , χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες σε σύστημα με κέντρο το Κ και άξονα z τον άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζουμε τη ροπή. Άρα  $I = \frac{m}{4\pi R^3/3} \int_{r=0}^R r^4 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \frac{2}{5} mR^2$  (το δεύτερο ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση  $\cos \theta = \xi$  γίνεται  $\int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi$ ).

(β) Η ολοκλήρωση της  $d(mv) = \Sigma F dt$  στο απειροστό χρονικό διάστημα που ασκείται η δύναμη F δίνει  $mv_0 = P$  (οι υπόλοιπες δυνάμεις έχουν μηδενική συνεισφορά στο όριο  $\Delta t \rightarrow 0$ ), άρα η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι  $v_0 = v_0 \hat{x}$  με  $v_0 = \frac{P}{m}$ .

Όμοια η ολοκλήρωση της  $d(I\omega) = \Sigma M_K dt$  στο απειροστό χρονικό διάστημα που ασκείται η δύναμη F, της οποίας η ροπή ως προς το Κ είναι  $KA \times F = (h - R)Fz$ , όπου ο άξονας  $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$  έχει φορά από τη σελίδα προς τα μέσα, δίνει αρχική γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0 = \omega_0 \hat{z}$  με  $\omega_0 = \frac{(h - R)P}{I}$ .

Είναι  $\frac{\omega_0 R}{v_0} = \frac{5h - R}{2R} \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ . Για  $h > R$  η περιστροφή γίνεται δεξιόστροφα (η γωνιακή ταχύτητα έχει φορά από τη σελίδα προς τα μέσα) ενώ για  $h < R$  αριστερόστροφα (η μπάλα έχει πίσω φάλτσα).

(γ) Το σημείο Σ έχει αρχική ταχύτητα  $v_0 + \omega_0 \times K\Sigma = (v_0 - \omega_0 R)\hat{x} = \frac{P(7R - 5h)}{2mR}\hat{x}$ . Άρα θα υπάρχει τριβή ολίσθησης με μέτρο  $\mu N = \mu mg \cos \beta$  και φορά αντίθετη στην ταχύτητα του Σ, δηλ.  $T = \mp \mu mg \cos \beta \hat{x}$  με το πάνω πρόσημο να αντιστοιχεί σε  $v_0 > \omega_0 R$  και το κάτω σε  $v_0 < \omega_0 R$ .

Η κίνηση του κέντρου μάζας καθορίζεται από τη θέση του στον άξονα x για την οποία  $m\ddot{x} = -mg \sin \beta \mp \mu mg \cos \beta$  (συνισταμένη της συνιστώσας του βάρους και της τριβής). Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε  $v = v_0 - (1 \pm 1)gt/2$ ,  $x = v_0 t - (1 \pm 1)gt^2/4$ .

Η περιστροφή καθορίζεται από τη γωνία φ μεταξύ κάποιας ακτίνας της μπάλας με κάποια σταθερή κατεύθυνση στο χώρο. Στο σχήμα έχει επιλεγεί η γωνία μεταξύ της μπλε ακτίνας με τον άξονα y και ισχύει  $\omega = \dot{\phi} \hat{z}$  (ελέγχουμε την φορά, πράγματι για αύξηση της γωνίας η ω έχει φορά προς τα μέσα, δηλ. τη φορά του  $\hat{z}$ ). Η εξίσωση κίνησης είναι  $I\dot{\omega} = K\Sigma \times T$  (η μονή ροπή ως προς το Κ είναι αυτή της τριβής), δηλ.  $I\dot{\omega} = \pm \mu mgR \cos \beta$ .

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε  $\omega = \omega_0 \pm \frac{5g}{4R}t$ ,  $\phi = \omega_0 t \pm \frac{5g}{8R}t^2$ .

Όσο περνά ο χρόνος το μέτρο της ταχύτητας του Σ  $(v - \omega R)\hat{x} = \pm[|v_0 - \omega_0 R| - (7 \pm 2)gt/4]\hat{x}$  ελαττώνεται και το χρόνο  $t_0 = \frac{4|v_0 - \omega_0 R|/g}{7 \pm 2}$  μηδενίζεται. Εκείνη τη στιγμή η ταχύτητα είναι  $v|_{t=t_0} = \frac{5v_0 + 2(1 \pm 1)\omega_0 R}{7 \pm 2}\hat{x}$  και η θέση  $x|_{t=t_0} = v_0 t_0 - (1 \pm 1)gt_0^2/4$ . Η θέση αυτή μπορεί να ελεγχθεί ότι είναι  $x|_{t=t_0} > 0$  για όλες τις τιμές  $\frac{\omega_0 R}{v_0} = \frac{5h - R}{2R} \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$  (παρότι για τις τιμές που αντιστοιχούν σε  $h < R/2$  ισχύει  $v|_{t=t_0} < 0$ , δηλ. η μπάλα έχει αρχίσει την κάθοδο τη στιγμή  $t_0$ ).

Από το σημείο αυτό και μετά η μπάλα κυλά χωρίς να ολισθαίνει, αρκεί βέβαια η στατική τριβή που απαιτείται να μην υπερβαίνει την οριακή τιμή  $\mu mg \cos \beta$ , κάτι που θα ελέγξουμε αργότερα. (Αυτή η φάση ξεκινά από την αρχική στιγμή στην περίπτωση που  $v_0 = \omega_0 R$ .)

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του κέντρου μάζας  $m\ddot{x} = T - mg \sin \beta$  και την περιστροφή  $I\ddot{\phi} = -TR$  μαζί με τη συνθήκη κύλισης  $v + \omega \times K\Sigma = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = R\dot{\phi}$  δίνουν  $\ddot{x} = -\frac{g \sin \beta}{1 + I/mR^2} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{5}{14}g$  και

$$T = \frac{mg}{1 + mR^2/I} = \frac{2}{7}mg.$$

Η τριβή προέκυψε μικρότερη της οριακής τιμής  $\mu mg \cos \beta = mg/2$ , άρα είναι πράγματι στατική και η μπάλα δεν θα ολισθαίνει.

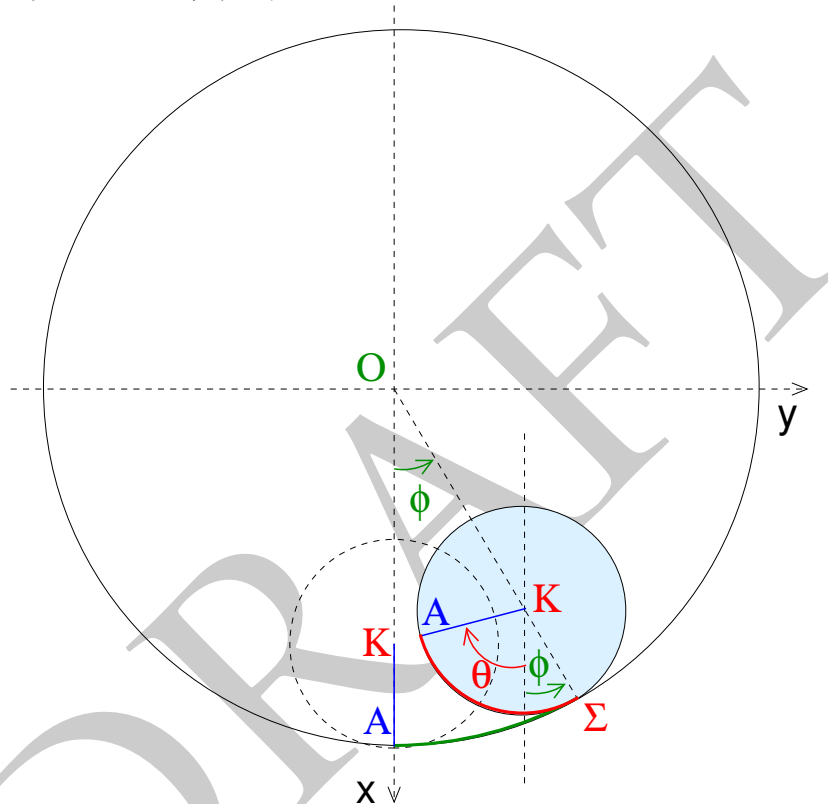
Η εξίσωση κίνησης είναι ισοδύναμη με ολοκλήρωμα ενέργειας  $\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{5}{14}gx = \frac{v|_{t=t_0}^2}{2} + \frac{5}{14}gx|_{t=t_0}$ . Θέτοντας  $x = 0$  η ζητούμενη ταχύτητα προκύπτει να είναι  $-\sqrt{v|_{t=t_0}^2 + \frac{5}{7}gx|_{t=t_0}}\hat{x}$ , δηλ.  $-\sqrt{\frac{35v_0^2 + 20v_0\omega_0 R + 8\omega_0^2 R^2}{63}}\hat{x}$

αν ισχύει  $v_0 > \omega_0 R$  και  $-\sqrt{\frac{3v_0^2 + 4v_0\omega_0 R}{7}} \hat{x}$  αν  $v_0 < \omega_0 R$  (με μέτρο μεγαλύτερο της  $v_0$ ).

Για το δεύτερη φάση της κίνησης στην οποία οι δυνάμεις δεσμών δεν παράγουν έργο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και Λαγκρανζιανός φορμαλισμός ή κατευθείαν το ολοκλήρωμα ενέργειας  $\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgx \sin \beta = E$  σε συνδυασμό με τη συνθήκη κύλισης  $v = \omega R$ .

### Παράδειγμα 11.8:

Ομογενής κύλινδρος μάζας  $m$  και ακτίνας  $r$  με κέντρο μάζας  $K$  κυλιέται χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό ακίνητου κυλίνδρου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R+r$  όπως στο σχήμα. Οι άξονες και των δύο κυλίνδρων είναι οριζόντιοι και η κίνηση γίνεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας  $g$ .



(α) Δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα της ιδιοπεριστροφής του μικρού κυλίνδρου  $\omega$  και η γωνιακή ταχύτητα του  $K$  (το οποίο περιστρέφεται γύρω από το  $O$ )  $\omega_K$  συνδέονται με τη σχέση  $\omega = -\frac{R}{r}\omega_K$ .

(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης για τη γωνία  $\phi$ . (Υπολογίστε τυχόν ροπή αδράνειας που θα χρειαστεί.)

(γ) Πόση πρέπει να είναι τουλάχιστον η  $\dot{\phi}$  στο κατώτερο σημείο ώστε ο κύλινδρος να κάνει πλήρεις κύκλους χωρίς ολίσθηση; Θεωρήστε γνωστό το συντελεστή στατικής τριβής  $\mu$ .

Λύση:

(α) Α' τρόπος, γεωμετρικά: Στο σχήμα φαίνεται η αρχική θέση του μικρού κύκλου (διακεκομμένη) καθώς και η θέση του όταν η  $OK$  έχει διανύσει γωνία  $\phi$ . Στον χρόνο αυτό η ακτίνα  $KA$  έχει διανύσει γωνία  $\theta$ , τέτοια ώστε το πράσινο τόξο  $\Sigma A$  του μεγάλου κύκλου να είναι ίσο με το κόκκινο τόξο  $\Sigma A$  του μικρού, δηλ.  $(R+r)\phi = r(\theta + \phi) \Leftrightarrow \theta = \frac{R}{r}\phi$ . Παραγωγίζοντας προκύπτει  $\dot{\theta} = \frac{R}{r}\dot{\phi}$  και αφού  $\omega_K = \dot{\phi}$ ,  $\omega = -\dot{\theta}$  προκύπτει η ζητούμενη.

Β' τρόπος, κινηματικά: Το κέντρο του μικρού κύκλου  $K$  έχει θέση  $OK$  ως προς το κέντρο του μεγάλου  $O$ . Αφού περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_K = \omega_K \hat{z}$  γύρω από αυτό η ταχύτητά του είναι  $v_K = \omega_K \times OK$ . Ο μικρός κύκλος περιστρέφεται με  $\omega = \omega \hat{z}$  γύρω από το κέντρο του  $K$ . Στο περιστρεφόμενο σύστημα του μικρού κύκλου κάθε σημείο σε θέση  $r$  (ως προς το  $K$ ) έχει ταχύτητα  $v_K + \omega \times r = \omega_K \times OK + \omega \times r$  ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή στο  $O$ . Το σημείο που βρίσκεται σε επαφή με τον μεγάλο κύκλο έχει θέση  $r_\Sigma = \frac{r}{R}OK$

και είναι ακίνητο ως προς το Ο (συνθήκη κύλισης), άρα  $\omega_K \times OK + \omega \times \frac{r}{R}OK = 0 \Leftrightarrow \omega = -\frac{R}{r}\omega_K$ .

(β) Η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου μάζας  $m$  και ακτίνας  $r$  ως προς τον άξονά του υπολογίζεται εύκολα σε σύστημα κυλινδρικών με άξονα  $z$  τον άξονα του κυλίνδρου (το σύστημα αυτό δεν έχει σχέση με το σύστημα που χρησιμοποιούμε για την μελέτη της κίνησης)  $I = \int \omega^2 dm$  με  $dm = \frac{m}{\pi r^2 \Delta z} \omega d\omega d\phi dz$ . Άρα

$$I = \frac{m}{\pi r^2 \Delta z} \int_{\omega=0}^r \omega^3 d\omega \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} dz = \frac{mr^2}{2}.$$

Αναλύοντας την κίνηση ως προς το κέντρο μάζας η κινητική ενέργεια είναι  $T = \frac{1}{2}mv_K^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ . Αντικαθι-

στώντας  $v_K = R\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta} = \frac{R}{r}\dot{\phi}$  και  $I = \frac{mr^2}{2}$  γράφεται  $T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\phi}^2$ .

Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε την κινητική ενέργεια και σαν καθαρά περιστροφική γύρω από το στιγμιαίο πόλο Σ, οπότε  $T = \frac{1}{2}I_\Sigma\dot{\theta}^2$ . Χρησιμοποιώντας την  $I_\Sigma = I + mr^2$  (από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων) βρίσκουμε  $T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\phi}^2$ .

Η δυναμική ενέργεια είναι  $V = -mgR \cos \phi$  οπότε η εξίσωση κίνησης είναι το ολοκλήρωμα ενέργειας  $\frac{3}{4}mR^2\dot{\phi}^2 - mgR \cos \phi = E$ .

(γ) Ο νόμος Νεύτωνα για το κέντρο μάζας δίνει στην ακτινική κατεύθυνση  $N - mg \cos \phi = mR\ddot{\phi}$  και στην αξιμουθιακή  $T - mg \sin \phi = mR\dot{\phi}$  όπου  $T$  η στατική τριβή, ενώ η εξίσωση  $\dot{L} = M$  για τη στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας  $L = I\omega = -I\dot{\theta}z$ , με  $M = Trz$  τη ροπή της τριβής, δίνει  $-I\ddot{\theta} = Tr$ . Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τη συνθήκη κύλισης  $\theta = \frac{R}{r}\phi$  δίνουν την εξίσωση κίνησης  $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3R} \sin \phi = 0$  (που είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα που βρέθηκε πριν),  $T = -\frac{mR}{2}\ddot{\phi}$  και  $N = mg \cos \phi + mR\dot{\phi}^2$ .

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης για να απαλείψουμε το  $\ddot{\phi}$  και το ολοκλήρωμα ενέργειας για να απαλείψουμε την  $\dot{\phi}^2$  βρίσκουμε  $T = \frac{1}{3}mg \sin \phi$  και  $N = \frac{7}{3}mg \cos \phi + \frac{4E}{3R}$ .

Για να μην χάσει την επαφή του ο μικρός κύλινδρος πρέπει συνεχώς να ισχύει  $N \geq 0$ . Υπάρχει περίπτωση να γίνει  $N = 0$  σε σημείο όπου  $\cos \phi = -\frac{4E}{7mgR}$  αρκεί να είναι αφενός  $E > 0$  (μόνο τότε η γωνία αυτή είναι μέσα στην επιτρεπτή περιοχή κίνησης αφού από τη σχέση  $N = mg \cos \phi + mR\dot{\phi}^2$  στη θέση  $N = 0$  είναι  $mR\dot{\phi}^2 = -mg \cos \phi$ ) και αφετέρου  $E < \frac{7}{4}mgR$  (ώστε  $|\cos \phi| < 1$ ).

Για να εκτελεί πλήρεις κύκλους ο κύλινδρος απαραίτητη προϋπόθεση είναι να ισχύει  $E \geq \frac{7}{4}mgR$  όπου  $E = \frac{3}{4}mR^2\dot{\phi}_{\phi=0}^2 - mgR$ , δηλ. πρέπει  $|\dot{\phi}_{\phi=0}| > \sqrt{11g/3R}$ .

Για να ισχύει συνεχώς η κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει η στατική τριβή να μην υπερβαίνει τη μέγιστη τιμή  $\mu N$ , δηλ. πρέπει να ισχύει  $|T| < \mu N \Leftrightarrow \frac{7 \cos \phi + 4E/mgR}{|\sin \phi|} > \frac{1}{\mu}$ . Για να εκτελεί πλήρεις κύκλους ο κύλινδρος πρέπει η παραπάνω ανισότητα να ισχύει σε κάθε  $\phi$ . Μελετώντας τη συνάρτηση του αριστερού μέλους  $f(\phi) = \frac{7 \cos \phi + \lambda}{|\sin \phi|}$  (αρκεί η μελέτη στο  $0 < \phi < \pi$  αφού είναι άρτια), όπου  $\lambda = \frac{4E}{7mgR} > 1$  (από την απαίτηση  $N > 0$ ) συμπεραίνουμε ότι έχει ελάχιστο όταν  $\phi = \arccos(-1/\lambda)$  ίσο με  $7\sqrt{\lambda^2 - 1}$ . Άρα πρέπει να ισχύει  $7\sqrt{\lambda^2 - 1} > \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \lambda > \sqrt{1 + 1/49\mu^2}$ . Αυτή είναι πιο ισχυρή ανισότητα από την  $\lambda > 1$  που είχαμε βρει με βάση την  $N > 0$ .

Αντικαθιστώντας  $\lambda = \frac{4E}{7mgR} = \frac{3R}{7g}\dot{\phi}_{\phi=0}^2 - \frac{4}{7}$  βρίσκουμε ότι πλήρεις κύκλοι με κύλιση χωρίς ολίσθηση απαι-

τούν  $|\dot{\phi}_{\phi=0}| > \sqrt{\frac{g}{3R} \left( 4 + \sqrt{49 + \frac{1}{\mu^2}} \right)}$ .



### 11.6.3 Κίνηση αξισυμμετρικού στερεού γύρω από σταθερό σημείο του άξονα συμμετρίας του

Όταν υπάρχει σημείο  $O$  του στερεού που μένει συνεχώς ακίνητο η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί καθαρά περιστροφική γύρω από αυτό το σταθερό σημείο, με τον άξονα περιστροφής βέβαια να μεταπίπτει γενικά. Η μελέτη απλουστεύεται στην υποπερίπτωση που έχουμε αξισυμμετρικό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο στήριξης  $O$  που βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του, δηλ. έχουμε σβούρα (ή στρόμβο) με μύτη μηδενικού πάχους. Ένας από τους κύριους άξονες που περνούν από το  $O$ , έστω ο  $\hat{x}_3$ , περνά και από το κέντρο μάζας  $K$  λόγω της αξισυμμετρίας. Χρησιμοποιώντας σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες Euler  $\vartheta, \varphi, \psi$  (ή ισοδύναμα τις σφαιρικές συντεταγμένες  $\theta = \vartheta, \phi = \varphi - \pi/2$  του  $K$  και τη γωνία  $\psi$  όπως στο παράδειγμα 11.1) η κινητική ενέργεια  $T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$ , όπου  $I_3$  η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας και  $I_1$  η ροπή αδράνειας ως προς κάθετους άξονες, αντικαθιστώντας τις σχέσεις 11.5–11.7 γράφεται  $T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2$ . Η απλή αυτή μορφή που προέκυψε λόγω της  $I_1 = I_2$  επιτρέπει να γίνει σχετικά εύκολα η μελέτη της κίνησης μέσω Αναλυτικής Μηχανικής όταν οι μόνες δυνάμεις είναι το βάρος  $-mg\hat{z}$  λόγω ομογενούς βαρύτητας και αντιδράσεις δεσμών στο σημείο στήριξης (μπορεί να γίνει βέβαια και μέσω Νευτώνειας Μηχανικής όπως στο παράδειγμα 11.9). Αν  $\mathbf{OK} = R\hat{x}_3$  η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους είναι  $V = -mg \cdot \mathbf{OK} = mgR \cos \vartheta$  και η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - mgR \cos \vartheta. \quad (11.37)$$

Δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $\psi, \varphi$ , ούτε από το χρόνο. Επομένως οι αντίστοιχες γενικευμένες ορμές όπως και η ενέργεια διατηρούνται, δηλ. έχουμε τρία ολοκληρώματα κίνησης.

Η  $\psi$ -ορμή είναι  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = I_3\omega_3 = L_3 = \text{σταθερά}$ , οπότε και η  $\omega_3$  είναι σταθερά.

Η  $\varphi$ -ορμή είναι  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + L_3 \cos \vartheta = L_z = \text{σταθερά}$ . Το ότι αυτή η έκφραση ισούται με την  $\xi_3 = \hat{z}$  συνιστώσα της στροφορμής προκύπτει από το μετασχηματισμό στροφής που δίνεται στο υποκεφάλαιο 11.2.

Η ενέργεια είναι  $\dot{\psi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{\vartheta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + mgR \cos \vartheta = E = \text{σταθερά}$ .

Έτσι καταλήγουμε στο σύστημα πρωτοβάθμιων διαφορικών εξισώσεων

$$I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = L_3, \quad (11.38)$$

$$I_1\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + L_3 \cos \vartheta = L_z, \quad (11.39)$$

$$\frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + mgR \cos \vartheta = E', \quad (11.40)$$

όπου  $E'$  είναι η ενέργεια χωρίς την (σταθερή) περιστροφική λόγω σπιν  $\frac{L_3^2}{2I_3}$ .

Η δεύτερη δίνει την  $\varphi$  συναρτήσει της  $\vartheta$  και όμοια η πρώτη δίνει την  $\psi$  συναρτήσει της  $\vartheta$ , δηλ.

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - L_3 \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta}, \quad \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_3}{I_1} + \frac{L_3 - L_z \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta}. \quad (11.41)$$

Αντικαθιστώντας στην τρίτη το πρόβλημα ανάγεται σε μονοδιάστατο ως προς  $\vartheta$  με ολοκλήρωμα ενέργειας

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\vartheta}^2 + V_{\text{eff}}(\vartheta) = E' \quad (11.42)$$

και ενεργό δυναμική ενέργεια

$$V_{\text{eff}}(\vartheta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \vartheta)^2}{2I_1 \sin^2 \vartheta} + mgR \cos \vartheta. \quad (11.43)$$



**11.6.3.1 Η περίπτωση  $L_z \neq \pm L_3$**

Η μελέτη της συνάρτησης της ενεργού δυναμικής ενέργειας (εξαιρώντας βέβαια την τετριμμένη περίπτωση  $L_z = L_3 = 0$  στην οποία το πρόβλημα ανάγεται στο επίπεδο εκκρεμές) δείχνει ότι απειρίζεται στα άκρα  $\vartheta = 0, \pi$  και έχει ένα ελάχιστο<sup>1</sup> όπως φαίνεται στο σχήμα 11.2. Επομένως η εξίσωση  $V_{\text{eff}}(\vartheta) = E'$  έχει δύο ρίζες  $\vartheta_{\text{min}}, \vartheta_{\text{max}}$  και η επιτρεπτή περιοχή της κίνησης είναι μεταξύ αυτών των ριζών. Η ταλαντωτική αυτή κίνηση του άξονα της σβούρας μεταξύ αυτών των οριακών τιμών  $\vartheta_{\text{min}}, \vartheta_{\text{max}}$  λέγεται κλόνηση του άξονα. Στην περίπτωση που η ενέργεια  $E'$  είναι ίση με το ελάχιστο της ενεργού δυναμικής δεν υπάρχει κλόνηση αλλά η γωνία  $\vartheta$  παραμένει σταθερή.

Η μετάπτωση του άξονα της σβούρας γύρω από τον κατακόρυφο άξονα γίνεται με γωνιακή ταχύτητα που δίνεται από την πρώτη από τις σχέσεις 11.41 (η δεύτερη δίνει την ιδιοπεριστροφή). Ανάλογα με το εύρος της κλόνησης, αλλά και με τις τιμές των  $L_z$  και  $L_3$  ενδέχεται η  $\dot{\varphi}$  να έχει σταθερό πρόσημο (οπότε η μετάπτωση του άξονα δεν αλλάζει φορά) ή όχι. Το πρόσημο της  $\frac{\dot{\varphi}}{\omega_3} = \frac{L_z/\omega_3 - I_3 \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta}$  καθορίζεται από τον αριθμητή, ο οποίος μεταβάλλεται από ελάχιστη τιμή  $L_z/\omega_3 - I_3 \cos \vartheta_{\text{min}}$  σε μέγιστη  $L_z/\omega_3 - I_3 \cos \vartheta_{\text{max}}$ .

**11.6.3.2 Η περίπτωση  $L_z = +L_3$  ή  $L_z = -L_3$**

Θα μελετήσουμε την περίπτωση  $L_z = L_3$ , όμοια γίνεται η μελέτη και για την  $L_z = -L_3$ . Στην περίπτωση αυτή η ενεργός δυναμική ενέργεια παίρνει μορφή

$$V_{\text{eff}}(\vartheta) = \frac{L_3^2}{2I_1} \tan^2 \frac{\vartheta}{2} + mgR \cos \vartheta \tag{11.44}$$

(χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες  $1 + \cos \vartheta = 2 \cos^2(\vartheta/2)$ ,  $1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2(\vartheta/2)$ ) και δεν απειρίζεται στο  $\vartheta = 0$  (απειρίζεται μόνο στο  $\vartheta = \pi$ ). Μελετώντας τη συνάρτηση<sup>2</sup> συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

<sup>1</sup>Για την παράγωγο της  $\frac{V_{\text{eff}}}{mgR} = -2D^2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2D^2 \frac{1 - \mu \sin a}{1 - \mu^2} + \mu$ , όπου  $\mu = \cos \vartheta$ ,  $\frac{L_3}{\sqrt{4mgRI_1}} = D \sin \frac{a}{2}$ ,  $\frac{L_z}{\sqrt{4mgRI_1}} = D \cos \frac{a}{2}$ , είναι  $\frac{(1 - \mu^2)^2}{mgR} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\mu} = -2D^2 \sin a(1 + \mu^2) + 4D^2 \mu + (1 - \mu^2)^2 = f(\mu)$ . Αν  $D \neq 0$  και  $\sin a \neq \pm 1$  είναι  $f(-1) < 0$  και  $f(1) > 0$  επομένως υπάρχει μηδενισμός σε κάποιο σημείο. Δεν είναι όμως τετριμμένο να δείξουμε ότι ο μηδενισμός είναι μόνο ένας.

Είναι  $f'(\mu) = 4\mu^3 - 4(1 + D^2 \sin a)\mu + 4D^2$  και  $f''(\mu) = 12\mu^2 - 4(1 + D^2 \sin a)$ . Για  $D^2 \sin a > 2$  ισχύει  $f''(\mu) < 0$ , η  $f'(\mu)$  είναι φθίνουσα, άρα  $f'(\mu) > f'(1) = 4D^2(1 - \sin a) > 0$ , δηλ. η  $f(\mu)$  είναι αύξουσα, συνεπώς ο μηδενισμός είναι μοναδικός.

Για  $D^2 \sin a < -1$  ισχύει  $f''(\mu) > 0$ , η  $f'(\mu)$  είναι αύξουσα, άρα  $f'(\mu) > f'(-1) = 4D^2(1 + \sin a) > 0$ , δηλ. η  $f(\mu)$  είναι αύξουσα, συνεπώς ο μηδενισμός είναι μοναδικός.

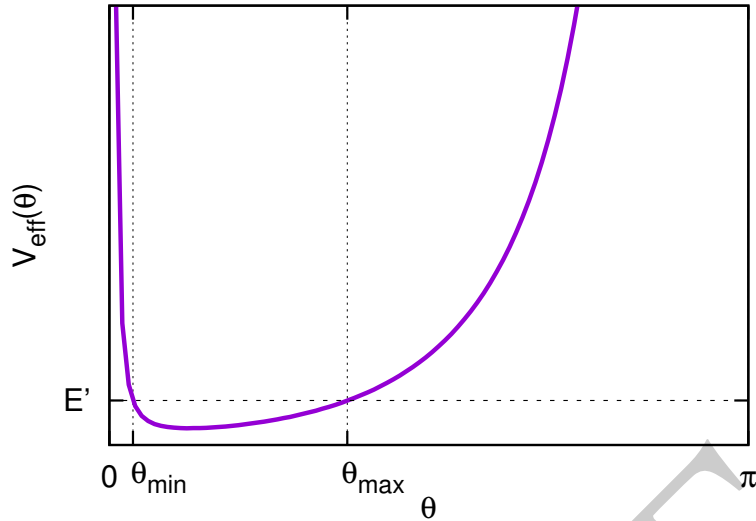
Για  $-1 < D^2 \sin a < 2$  στο διάστημα  $|\mu| < \sqrt{\frac{1 + D^2 \sin a}{3}}$  ισχύει  $f''(\mu) < 0$  και η  $f'(\mu)$  είναι φθίνουσα, άρα έχει ελάχιστο στο  $\mu = \sqrt{\frac{1 + D^2 \sin a}{3}}$  ίσο με  $4D^2 - 8 \left(\frac{1 + D^2 \sin a}{3}\right)^{3/2}$ . Αν επιπλέον της  $-1 < D^2 \sin a < 2$  ισχύει και  $D^2 > 2 \left(\frac{1 + D^2 \sin a}{3}\right)^{3/2}$  η ελάχιστη αυτή τιμή είναι θετική οπότε πάντα  $f'(\mu) > 0$ , η  $f(\mu)$  είναι αύξουσα, συνεπώς ο μηδενισμός είναι μοναδικός. Αν όμως εκτός της  $-1 < D^2 \sin a < 2$  ισχύει και  $D^2 < 2 \left(\frac{1 + D^2 \sin a}{3}\right)^{3/2} < 2$  υπάρχουν δύο λύσεις της  $4\mu_0^3 - 4(1 + D^2 \sin a)\mu_0 + 4D^2 = 0$

εκατέρωθεν του ελάχιστου στο  $\mu = \sqrt{\frac{1 + D^2 \sin a}{3}}$  και στην περιοχή  $(\mu_{01}, \mu_{02})$  η  $f'(\mu)$  είναι αρνητική. Ακόμα και τότε όμως η ελάχιστη τιμή  $f(\mu_{02})$  είναι θετική, οπότε πάλι η  $f(\mu)$  είναι αύξουσα, συνεπώς ο μηδενισμός είναι μοναδικός.

Το ότι  $f(\mu_{02}) > 0 \Leftrightarrow -2D^2 \sin a(1 + \mu_{02}^2) + 4D^2 \mu_{02} + (1 - \mu_{02}^2)^2 > 0$  αποδεικνύεται αντικαθιστώντας  $D^2 = \frac{\mu_{02}(1 - \mu_{02}^2)}{1 - \mu_{02} \sin a}$  που

προκύπτει από την  $f'(\mu_{02}) = 0$ . Έτσι προκύπτει  $f(\mu_{02}) > 0 \Leftrightarrow \sin a < 1 + \frac{(1 - \mu_{02})^3}{\mu_{02}(\mu_{02}^2 + 3)}$  το οποίο ισχύει γιατί το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι μεγαλύτερο της μονάδας.

<sup>2</sup>Είναι  $\frac{dV_{\text{eff}}}{d\vartheta} = 2mgR \frac{\sin(\vartheta/2)}{\cos^3(\vartheta/2)} \left[ \frac{L_3^2}{4mgRI_1} - \cos^4(\vartheta/2) \right]$  και  $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\vartheta^2} = \frac{L_3^2}{4I_1} \frac{3 - 2 \cos^2(\vartheta/2)}{\cos^4(\vartheta/2)} - mgR[2 \cos^2(\vartheta/2) - 1]$ .



Σχήμα 11.2: Η ενεργός δυναμική ενέργεια, η οποία για  $L_z \neq \pm L_3$  απειρίζεται στα  $\vartheta = 0, \pi$  και έχει ένα ελάχιστο. Η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι  $\vartheta_{\min} \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$ .

Αν  $\omega_3^2 > \frac{4mgRI_1}{I_3^2}$  έχει ένα ακρότατο στο  $\vartheta = 0$  το οποίο είναι ελάχιστο γιατί  $\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{4I_1} - mgR > 0$ .

Αν  $\omega_3^2 < \frac{4mgRI_1}{I_3^2}$  το ακρότατο στο  $\vartheta = 0$  είναι μέγιστο και υπάρχει ένα ελάχιστο στη γωνία  $\theta_0 = 2 \arccos \left( \frac{I_3^2 \omega_3^2}{4mgRI_1} \right)^{1/4}$

το οποίο είναι ελάχιστο γιατί  $\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 4mgR \sin^2(\vartheta_0/2) > 0$ .

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να μελετήσουμε την ευστάθεια της περίπτωσης που η σβούρα έχει αρχικά τον άξονά της κατακόρυφο (με ενέργεια  $E' = mgR$ ). Αν περιστρέφεται αρκετά γρήγορα, με  $|\omega_3| > \sqrt{4mgRI_1}/I_3$ , η κίνηση είναι ευσταθής (αυτή η ευσταθής κατάσταση λέγεται κοιμωμένη σβούρα). Αν όμως  $|\omega_3| < \sqrt{4mgRI_1}/I_3$  η κίνηση είναι ασταθής και θα γινεται με μετάπτωση και κλόνηση μεταξύ της κατακόρυφης και της γωνίας που

αντιστοιχεί σε  $V_{\text{eff}} = E' \Leftrightarrow \vartheta_{\max} = 2 \arccos \left( \frac{I_3^2 \omega_3^2}{4mgRI_1} \right)^{1/2}$ .

Αν η σβούρα ξεκινήσει κοιμωμένη, αλλά λόγω τριβών η  $|\omega_3|$  ελαττωθεί, όταν πέσει κάτω από την κρίσιμη τιμή η σβούρα θα αρχίσει να εκτελεί μετάπτωση και κλόνηση, σε διάστημα  $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$  διαρκώς μεγαλύτερο καθώς η  $|\omega_3|$  θα ελαττώνεται.

### Παράδειγμα 11.9:

Μελετήστε την κίνηση σβούρας μέσω Νευτώνειας Μηχανικής.

Λύση:

Έστω  $\hat{R}$  το μοναδιαίο πάνω στον άξονα συμμετρίας της σβούρας  $Ox_3$  και  $R\hat{R}$  η θέση του κέντρου μάζας. Σύμφωνα με το παράδειγμα 11.1 η γωνιακή ταχύτητα γράφεται  $\omega = \omega_{12} + \omega_3 \hat{R}$  με  $\omega_{12} = \hat{R} \times \dot{\hat{R}}$ . Η εξίσωση κίνησης είναι  $\dot{L} = R\hat{R} \times mg \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(I_1 \hat{R} \times \dot{\hat{R}} + I_3 \omega_3 \hat{R}) = -mgR\hat{R} \times \hat{z}$ .

Η προβολή της εξίσωσης αυτής πάνω στο  $\hat{R}$ , χρησιμοποιώντας ότι  $\dot{\hat{R}} \perp \hat{R}$ , δίνει το ολοκλήρωμα  $I_3 \omega_3 = L_3 = \text{σταθερά}$ , οπότε και η  $\omega_3$  είναι σταθερά.

Η προβολή της πάνω στο  $\hat{z}$  δίνει το ολοκλήρωμα  $I_1(\hat{R} \times \dot{\hat{R}}) \cdot \hat{z} + L_3 \hat{R} \cdot \hat{z} = L_z = \text{σταθερά}$ .

Η προβολή της πάνω στην  $\omega_{12}$  δίνει το ολοκλήρωμα ενέργειας  $\frac{1}{2} I_1 \omega_{12}^2 + mgR\hat{R} \cdot \hat{z} = E'$  (είναι η ενέργεια χωρίς την περιστροφική  $\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$  λόγω σπιν, η οποία είναι από μόνη της σταθερά).

Χρησιμοποιώντας τις γωνίες Euler, ή ισοδύναμα τις σφαιρικές συντεταγμένες για το  $\hat{R}$  (παράδειγμα 11.1), είναι  $\omega_{12} = \hat{R} \times \dot{\hat{R}} = \hat{R} \times (\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}) = -\sin\theta\dot{\phi}\hat{\theta} + \dot{\theta}\hat{\phi}$  επομένως οι διατηρήσεις των  $L_z, E'$  δίνουν  $I_1(\dot{\theta}\hat{\phi} - \sin\theta\dot{\phi}\hat{\theta}) \cdot \hat{z} + L_3\hat{R} \cdot \hat{z} = L_z \Leftrightarrow I_1\sin^2\theta\dot{\phi} + L_3\cos\theta = L_z$  και  $\frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + mgR\cos\theta = E'$ . Συνδυάζοντας τις εξισώσεις αυτές το πρόβλημα ανάγεται σε μονοδιάστατο ως προς  $\theta$  με ολοκλήρωμα ενέργειας  $\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E'$  και ενεργό δυναμική ενέργεια  $V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgR\cos\theta$  ενώ η γωνία  $\phi$  δίνεται από  $\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$ .

Για να βρούμε την ιδιοπεριστροφή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση  $\omega = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{\phi} + \psi\hat{x}_3$  η οποία δίνει  $\omega_3 = \omega \cdot \hat{x}_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \psi$ , οπότε η διατήρηση της  $L_3$  συνεπάγεται  $I_3(\dot{\phi}\cos\theta + \psi) = L_3 \Leftrightarrow \psi = \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_3}{I_1} + \frac{L_3 - L_z\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$ .

### 11.6.4 Κίνηση στερεού στο χώρο

Στην περίπτωση αυτή η κίνηση αναλύεται στην κίνηση του κέντρου μάζας  $K$  και σε περιστροφή γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $K$ .

Η θέση  $R_K$  του  $K$  ως προς αδρανειακό σύστημα καθορίζεται από  $ma_K = \Sigma F$  όπου  $\Sigma F$  η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων.

Για να περιγράψουμε την περιστροφική κίνηση του στερεού γύρω από στιγμιαίο άξονα που περνά από το  $K$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γωνίες Euler  $\varphi, \vartheta, \psi$  που ορίστηκαν στο κεφάλαιο 11.2, ή ισοδύναμα τις σφαιρικές συντεταγμένες  $\phi, \theta$  του στιγμιαίου άξονα περιστροφής  $Kx_3$  ως προς το αδρανειακό σύστημα  $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$  (που ορίζουν τον προσανατολισμό του άξονα περιστροφής) και τη γωνία  $\psi$  για την ιδιοπεριστροφή του στερεού γύρω από τον άξονα  $Kx_3$ .

Η στροφορμή ως προς το  $K$  είναι  $L = I \cdot \omega = I_1\omega_1\hat{x}_1 + I_2\omega_2\hat{x}_2 + I_3\omega_3\hat{x}_3$  στο σύστημα των κύριων αξόνων και η κινητική ενέργεια είναι  $T = \frac{1}{2}mv_K^2 + \frac{1}{2}L \cdot \omega = \frac{1}{2}m\dot{R}_K^2 + \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$ . Η τελευταία χρησιμεύει στο να μελετήσουμε την κίνηση μέσω Αναλυτικής Μηχανικής όταν αυτό είναι εφικτό. Σε κάθε περίπτωση η περιστροφή περιγράφεται από την εξίσωση  $\dot{L} = M$  ή ισοδύναμα την 11.29 που έχει συνιστώσες

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1, \tag{11.45}$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = M_2, \tag{11.46}$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3. \tag{11.47}$$

Οι παραπάνω λέγονται εξισώσεις Euler. Μαζί με τις σχέσεις 11.5–11.7 που γράφονται

$$\dot{\phi}\sin\vartheta = \omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi, \tag{11.48}$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_1\cos\psi - \omega_2\sin\psi, \tag{11.49}$$

$$\dot{\psi} = \omega_3 - \dot{\phi}\cos\vartheta. \tag{11.50}$$

αποτελούν σύστημα ως προς  $\varphi, \vartheta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  (με δεδομένο ότι οι συνιστώσες της ροπής  $M$  ως προς το  $K$  στο σύστημα των κύριων αξόνων είναι γνωστές συναρτήσεις των γωνιών Euler).

#### Παράδειγμα 11.10:

Ομογενής σφαίρα μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$  κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.

(α) Δείξτε ότι ανεξάρτητα από το αν κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει ή όχι το διάνυσμα  $I\omega + m\Sigma K \times v_K$ , όπου  $\Sigma$  το σημείο επαφής και  $K$  το κέντρο μάζας, είναι σταθερό.

(β) Γράφοντας την γωνιακή ταχύτητα σαν άθροισμα κατακόρυφης και οριζόντιας συνιστώσας δείξτε ότι η κατακόρυφη είναι σταθερή και η οριζόντια  $\frac{mR}{I}v_K \times \hat{z} + C$ , όπου  $C$  σταθερό οριζόντιο διάνυσμα.

(γ) Αν η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει δείξτε ότι τόσο η ταχύτητα όσο και η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερές.

Λύση:

(α) Ως προς το κέντρο μάζας ισχύει  $L = I\omega$  και  $\dot{L} = -R\hat{z} \times N$  όπου  $N$  η αντίδραση (έχει παράλληλη και κάθετη συνιστώσα) και  $\hat{z}$  κατακόρυφος άξονας με φορά προς τα πάνω και  $z = 0$  το οριζόντιο επίπεδο. Αντικαθιστώντας την  $N$  από το νόμο Νεύτωνα  $m\dot{v}_K = -mg\hat{z} + N$  βρίσκουμε  $\dot{L} = -R\hat{z} \times (m\dot{v}_K + mg\hat{z}) \Leftrightarrow I\dot{\omega} + mR\hat{z} \times v_K =$  σταθερό διάνυσμα.

(β) Η κατακόρυφη προβολή της τελευταίας εξίσωσης δίνει  $\omega_z =$  σταθερά και η οριζόντια προβολή δίνει  $\omega_{xy} = \frac{mR}{I} v_K \times \hat{z} + C$ .

(γ) Κύλιση χωρίς ολίσθηση σημαίνει  $v_\Sigma = 0 \Leftrightarrow v_K + \omega \times K\Sigma = 0 \Leftrightarrow v_K = \omega_{xy} \times R\hat{z}$ . Άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται  $\omega_{xy} = \frac{mR}{I} (\omega_{xy} \times R\hat{z}) \times \hat{z} + C = -\frac{mR^2}{I} \omega_{xy} + C \Leftrightarrow \omega_{xy} = C/(1 + mR^2/I) =$  σταθερά. Η ταχύτητα  $v_K = \omega_{xy} \times R\hat{z}$  είναι επίσης σταθερά.

### Παράδειγμα 11.11:

Στερεό κυλινδρικό σώμα με  $I_1 = I_2$  περιστρέφεται αρχικά κυρίως γύρω από τον άξονα συμμετρίας του, αλλά και με μία μικρή συνιστώσα κάθετα σε αυτόν, δηλ. η αρχική του γωνιακή ταχύτητα είναι  $\omega = \omega_{01}\hat{x}_1 + \omega_{03}\hat{x}_3$  εκφρασμένη στο σύστημα των κυρίων αξόνων που περνούν από το κέντρο μάζας. Στο σώμα ασκείται ροπή  $M = -\lambda L$  ως προς το κέντρο μάζας όπου  $\lambda$  θετική σταθερά.

(α) Θεωρώντας ότι η αρχική στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας είναι  $L_0 = L_0\hat{\xi}_3$  δείξτε ότι σε κάθε χρόνο θα είναι  $L = L_0 e^{-\lambda t} \hat{\xi}_3$ .

(β) Εφαρμόζοντας τον πίνακα στροφής δείξτε τις σχέσεις  $I_1\omega_1 = L \sin \psi \sin \vartheta$ ,  $I_2\omega_2 = L \cos \psi \sin \vartheta$ ,  $I_3\omega_3 = L \cos \vartheta$  και μέσω αυτών βρείτε τις αρχικές τιμές των γωνιών Euler. (Θεωρήστε θετικές τις  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{03}$  και  $\varphi_0 = 0$ .)

(γ) Επιλύστε τις εξισώσεις Euler για να βρείτε τις  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_3(t)$ .

(δ) Χρησιμοποιώντας τις  $I_1\omega_1 = L \sin \psi \sin \vartheta$ ,  $I_2\omega_2 = L \cos \psi \sin \vartheta$ ,  $I_3\omega_3 = L \cos \vartheta$ , αλλά και τη σχέση 11.7 βρείτε τις γωνίες Euler σε κάθε χρόνο. Σε ποιο προσανατολισμό θα καταλήξει το σώμα;

Λύση:

(α) Ολοκληρώνοντας την εξίσωση κίνησης  $\dot{L} = -\lambda L$  βρίσκουμε  $L = L_0 e^{-\lambda t} \hat{\xi}_3$ .

(β) Εφαρμόζοντας τον πίνακα στροφής και τις εκφράσεις της στροφορμής στα δύο συστήματα,  $L = L\hat{\xi}_3$  και  $L = I_1\omega_1\hat{x}_1 + I_2\omega_2\hat{x}_2 + I_3\omega_3\hat{x}_3$  προκύπτουν οι σχέσεις  $I_1\omega_1 = L \sin \psi \sin \vartheta$ ,  $I_2\omega_2 = L \cos \psi \sin \vartheta$ ,  $I_3\omega_3 = L \cos \vartheta$ .

Εφαρμόζοντάς τις στην αρχική στιγμή παίρνουμε  $I_1\omega_{01} = L_0 \sin \psi_0 \sin \vartheta_0$ ,  $0 = L_0 \cos \psi_0$ ,  $I_3\omega_{03} = L_0 \cos \vartheta_0$  από τις οποίες βρίσκουμε  $\vartheta_0 = \arccos \frac{I_3\omega_{03}}{L_0}$ ,  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  (αφού  $\omega_{01} > 0$ ) και ότι ισχύει  $I_1\omega_{01} = L_0 \sin \vartheta_0$  (ισοδύναμη της  $L_0^2 = I_1^2\omega_{01}^2 + I_3^2\omega_{03}^2$ ).

(γ) Η τρίτη εξίσωση Euler  $I_3\dot{\omega}_3 = M_3 = -\lambda I_3\omega_3$  ολοκληρώνεται και δίνει  $\omega_3 = \omega_{03} e^{-\lambda t}$ .

Οι πρώτες δύο αποτελούν σύστημα  $\dot{\omega}_1 + C e^{-\lambda t} \omega_2 = -\lambda \omega_1$ ,  $\dot{\omega}_2 - C e^{-\lambda t} \omega_1 = -\lambda \omega_2$ , όπου  $C = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_{03}$ .

Θέτοντας  $\zeta = \omega_1 + i\omega_2$  το σύστημα γράφεται σαν μία εξίσωση  $\frac{\dot{\zeta}}{\zeta} = -\lambda + iC e^{-\lambda t}$ , η οποία έχει λύση  $\zeta = \zeta_0 \exp\left(-\lambda t - i\frac{C}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)$ . Η σταθερά υπολογίζεται  $\zeta_0 = \omega_{01} \exp\left(i\frac{C}{\lambda}\right)$  από την αρχική συνθήκη  $\zeta|_{t=0} = \omega_{01}$ .

Άρα η λύση σε κάθε χρόνο είναι  $\zeta = \omega_{01} \exp\left[-\lambda t + i\frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\right]$  και δίνει  $\omega_1 = \omega_{01} e^{-\lambda t} \cos\left[\frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\right]$ ,

$\omega_2 = \omega_{01} e^{-\lambda t} \sin\left[\frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\right]$ . Σε χρόνους  $t \geq 5/\lambda$  το στερεό σταματά να περιστρέφεται.

(δ) Οι  $I_3\omega_3 = L \cos \vartheta$ ,  $I_1\omega_1 = L \sin \psi \sin \vartheta$ ,  $I_2\omega_2 = L \cos \psi \sin \vartheta$ , αντικαθιστώντας τις λύσεις που βρήκαμε,  $L = L_0 e^{-\lambda t}$ , αλλά και τις  $L_0 \cos \vartheta_0 = I_3\omega_{03}$ ,  $L_0 \sin \vartheta_0 = I_1\omega_{01}$  που βρήκαμε στο ερώτημα (β), δίνουν

$\cos \vartheta_0 = \cos \vartheta, \sin \vartheta_0 \cos \left[ \frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \right] = \sin \psi \sin \vartheta, \sin \vartheta_0 \sin \left[ \frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \right] = \cos \psi \sin \vartheta$ . Από την πρώτη βρίσκουμε ότι  $\vartheta = \vartheta_0$  συνεχώς. Οι άλλες δύο δίνουν  $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$ . Η σχέση 11.7 γράφεται  $\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \Leftrightarrow \omega_{03} e^{-\lambda t} = \dot{\varphi} \cos \vartheta_0 + \dot{\psi}$ . Η ολοκλήρωσή της δίνει  $\varphi = \frac{I_3 \omega_{03}}{\lambda I_1 \cos \vartheta_0} (1 - e^{-\lambda t})$ . Άρα το σώμα θα καταλήξει να έχει προσανατολισμό που αντιστοιχεί σε γωνία στροφής του άξονά του κατά  $\Delta\varphi = \frac{I_3 \omega_{03}}{\lambda I_1 \cos \vartheta_0}$ . (Η γωνία του άξονα συμμετρίας του σώματος με τον άξονα  $\xi_3$  βρήκαμε ότι παραμένει σταθερή, ενώ λόγω ιδιοπεριστροφής το σώμα έχει διαγράψει συνολική γωνία  $\Delta\psi = -\frac{C}{\lambda}$  γύρω από τον άξονά του.)

### 11.6.5 Ελεύθερη περιστροφή στερεού

Με τον όρο «ελεύθερη περιστροφή» εννοούμε κίνηση στερεού στο χώρο απουσία ροπών ως προς το κέντρο μάζας. Αυτή η ενδιαφέρουσα υποπερίπτωση καλύπτει κίνηση υπό την επίδραση ομογενούς βαρύτητας της οποίας η ροπή ως προς το Κ είναι μηδενική (και θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν άλλες ροπές ως προς το Κ). Επίσης καλύπτει κίνηση σε σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται με  $a_0 = g$  (π.χ. μέσα στον διεθνή διαστημικό σταθμό αγνοώντας την μικροβαρύτητα που οφείλεται σε παλιρροϊκές δυνάμεις) οπότε η συνισταμένη βάρους  $mg$  και υποθετικής δύναμης  $-ma_0$  είναι μηδενική (σε αυτή την περίπτωση το Κ κινείται με σταθερή ταχύτητα). Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στους κύριους άξονες προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων Euler

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0, \tag{11.51}$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0, \tag{11.52}$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0. \tag{11.53}$$

Για τέτοια κίνηση η εξίσωση κίνησης στο αδρανειακό σύστημα  $\dot{L} = 0$  συνεπάγεται ότι η στροφορμή διατηρείται. (Στο σύστημα που περιστρέφεται με το στερεό αυτό δεν είναι προφανές, αλλά μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύστημα των εξισώσεων Euler μαζί με τις σχέσεις 11.48–11.50 συνεπάγεται τη σταθερότητα των συνιστωσών της στροφορμής στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, οι οποίες βρίσκονται μέσω του μετασχηματισμού στροφής που δίνεται στο υποκεφάλαιο 11.2.)

Η διατήρηση του μέτρου της στροφορμής δίνει άμεσα το ολοκλήρωμα

$$I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = L^2 \tag{11.54}$$

(κάτι που αποδεικνύεται και αν πολλαπλασιάσουμε τις εξισώσεις Euler με  $I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3$  αντίστοιχα και τις προσθέσουμε κατά μέλη).

Επίσης ισχύει η διατήρηση της περιστροφικής ενέργειας  $E$  (κάτι που αποδεικνύεται αν πολλαπλασιάσουμε τις εξισώσεις Euler με  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  αντίστοιχα και τις προσθέσουμε κατά μέλη), δηλ.

$$L \cdot \omega = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 2E, \tag{11.55}$$

κάτι που σημαίνει ότι η προβολή της  $\omega$  πάνω στη στροφορμή είναι επίσης σταθερή και ίση με  $2E/L$ .

Στην περίπτωση που όλες οι ροπές αδράνειας είναι ίσες οι εξισώσεις Euler ολοκληρώνονται κατευθείαν και δίνουν τη σταθερότητα της  $\omega$ . Επίσης εύκολα ολοκληρώνονται στην περίπτωση που δύο από τις κύριες ροπές είναι ίσες, όπως θα εξετάσουμε στο παράδειγμα 11.14. Η μελέτη στην περίπτωση όπου όλες οι ροπές είναι άνισες όπως θα δούμε παρακάτω ανάγεται στη μελέτη ιδανικού εκκρεμούς.

Έστω επιλέγουμε τους κύριους άξονες ώστε να ισχύει  $I_1 < I_2 < I_3$  (προφανώς δεν βλάπτεται η γενικότητα). Οι διατηρήσεις του μέτρου της στροφορμής και της ενέργειας μπορούν να θεωρηθούν σύστημα που δίνει δύο συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας συναρτήσει της άλλης. Έτσι, συναρτήσει της  $\omega_1$ , βρίσκουμε την  $\omega_3$  από

$\omega_3^2 = \frac{I_1(I_2 - I_1)\omega_1^2 + L^2 - 2EI_2}{I_3(I_3 - I_2)}$  και την  $\omega_2$  από  $\frac{I_1(I_3 - I_1)}{2EI_3 - L^2}\omega_1^2 + \frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - L^2}\omega_2^2 = 1$ . Η τελευταία ικανοποιείται ταυτοτικά αν γράψουμε

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \cos \Phi, \quad (11.56)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \sin \Phi. \quad (11.57)$$

Η αντικατάσταση σε μία από τις πρώτες δύο εξισώσεις Euler δίνει

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}} \dot{\Phi}, \quad (11.58)$$

ενώ η αντικατάσταση στη σχέση  $\omega_3^2 = \frac{I_1(I_2 - I_1)\omega_1^2 + L^2 - 2EI_2}{I_3(I_3 - I_2)}$  δίνει τη διαφορική που καθορίζει τη συνάρτηση  $\Phi(t)$  η οποία γράφεται

$$\dot{\Phi}^2 + \mathcal{V}(\Phi) = \mathcal{E} \quad (11.59)$$

με «δυναμικό»

$$\mathcal{V}(\Phi) = \Omega^2 \sin^2 \Phi, \quad \Omega = \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - L^2)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad (11.60)$$

και «ενέργεια»

$$\mathcal{E} = \frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}. \quad (11.61)$$

Η εξίσωση κίνησης για την  $\Phi$  είναι ισοδύναμη με  $2\ddot{\Phi} + \Omega^2 \sin(2\Phi) = 0$ , δηλ. εξίσωση εκκρεμούς με γωνία  $2\Phi$ . Το σχήμα 11.3 δείχνει τη γραφική παράσταση του «δυναμικού», το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης που καθορίζει άμεσα την  $\omega_3$  σαν συνάρτηση της γωνίας  $\Phi$ , καθώς και τις  $\omega_1, \omega_2$ . Όλα τα γραφήματα αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς κίνησης  $2EI_3 - L^2$ , ενώ οι διάφορες καμπύλες φάσης αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της «ενέργειας»  $\mathcal{E}$ , ή ισοδύναμα της σταθεράς κίνησης  $L^2 - 2EI_1 = \frac{I_1 I_2 I_3}{I_3 - I_2} \mathcal{E}$  (ή της

$L^2 - 2EI_2 = \frac{I_1 I_2 I_3}{I_3 - I_1} (\mathcal{E} - \Omega^2)$ ). Αν είναι μεγαλύτερη από το μέγιστο του «δυναμικού», δηλ.  $\mathcal{E} > \Omega^2 \Leftrightarrow$

$L^2 > 2EI_2$  (κάτι που αντιστοιχεί σε αρχικές συνιστώσες της στροφορμής που ικανοποιούν την ανισότητα  $L_3^2(1 - I_2/I_3) > L_1^2(I_2/I_1 - 1)$ ) το εκκρεμές εκτελεί πλήρεις κύκλους, δηλ. σε χρόνο  $\int_0^\pi d\Phi / \sqrt{\mathcal{E} - \Omega^2 \sin^2 \Phi}$  προστίθεται (ή αφαιρείται) γωνία  $\pi$  στην  $\Phi$ . Αυτή είναι η περίοδος της  $\omega_3(t)$ , όμως η περίοδος των  $\omega_1(t)$  και  $\omega_2(t)$  είναι διπλάσια γιατί για να επαναληφθούν πρέπει να προστεθεί γωνία  $2\pi$  στη  $\Phi$ .

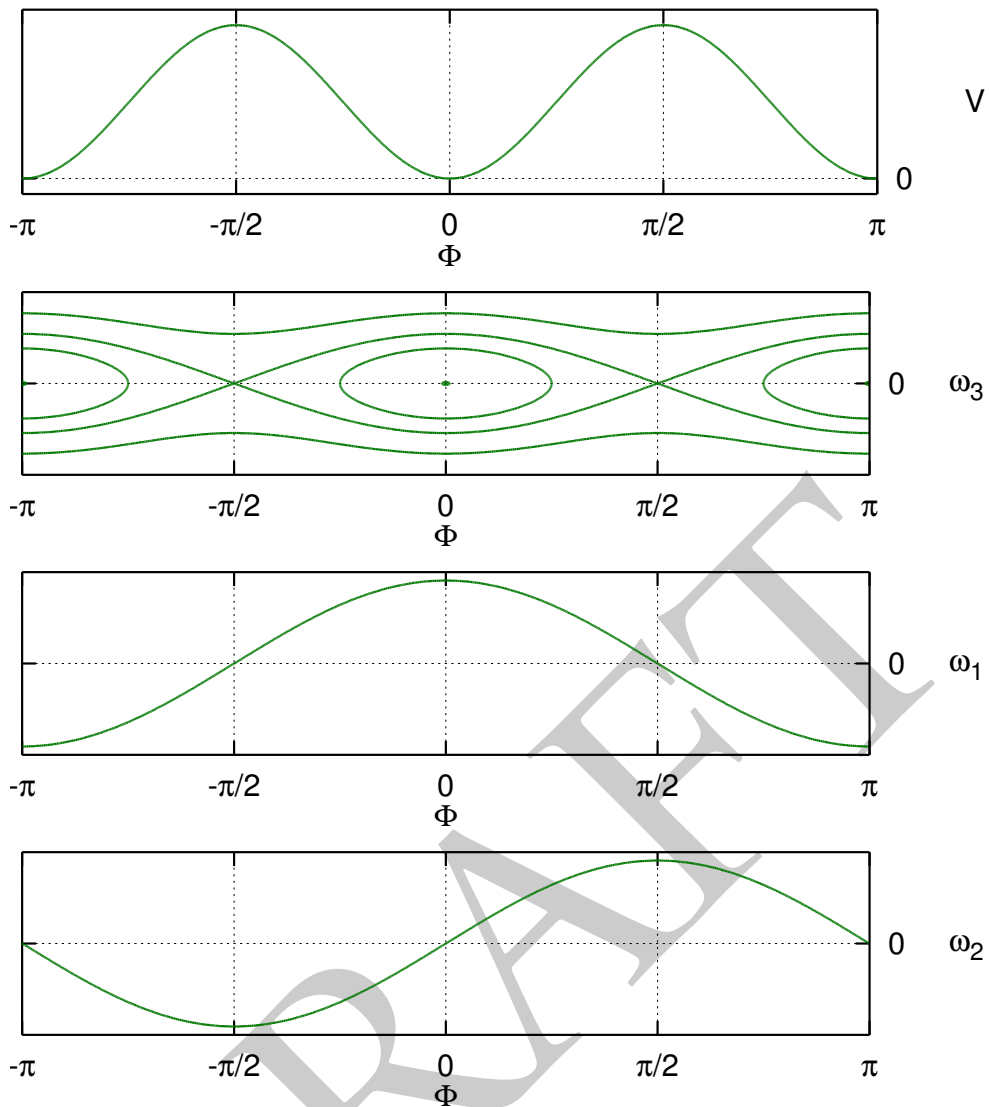
Αν ισχύει  $\mathcal{E} < \Omega^2 \Leftrightarrow L^2 < 2EI_2$  (κάτι που αντιστοιχεί σε αρχικές συνιστώσες της στροφορμής που ικανοποιούν την ανισότητα  $L_3^2(1 - I_2/I_3) < L_1^2(I_2/I_1 - 1)$ ) η  $\Phi$  μεταβάλλεται μεταξύ των ακραίων τιμών  $\pm\Phi_{\max}$  όπου

$$\Phi_{\max} = \arcsin \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\Omega} \in (0, \pi/2). \text{ Η περίοδος (τόσο για την } \omega_3 \text{ όσο και για τις } \omega_1, \omega_2) \text{ είναι } 2 \int_0^{\Phi_{\max}} \frac{d\Phi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Omega^2 \sin^2 \Phi}}.$$

Η μελέτη του «δυναμικού» μας δίνει απάντηση και για την ευστάθεια των περιστροφών γύρω από τους κύριους άξονες.

Η περιστροφή γύρω από τον άξονα  $I_1$  είναι λύση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε  $\Phi = 0$  ή  $\pi$ . Εκεί το δυναμικό είναι ελάχιστο άρα η κίνηση είναι ευσταθής. Γύρω από το  $\Phi = 0$  είναι  $\mathcal{V}(\Phi) \approx \Omega^2 \Phi^2$  οπότε παίρνουμε εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή  $\ddot{\Phi}^2 + \Omega^2 \Phi^2 = \mathcal{E}$  με λύση  $\Phi = \Phi_0 \sin(\Omega t + C)$  και μικρό πλάτος  $\Phi_0 =$

$$\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\Omega} = \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)}{(I_2 - I_1)(2EI_3 - L^2)}}. \text{ Η λύση είναι λοιπόν } \omega_1 \approx \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}}, \omega_2 \approx \sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_2(I_2 - I_1)}} \sin(\Omega t + C),$$



Σχήμα 11.3: Η λύση των εξισώσεων Euler για το πρόβλημα ελεύθερης περιστροφής στερεού σώματος. Από πάνω προς τα κάτω φαίνονται το «δυναμικό»  $V(\Phi)$ , το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης που δίνει την  $\omega_3(\Phi)$ , η  $\omega_1(\Phi)$  και η  $\omega_2(\Phi)$ .

$$\omega_3 \approx \sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \cos(\Omega t + C).$$

Όμοια γύρω από το  $\Phi = \pi$  προκύπτει η λύση  $\Phi \approx \pi + \Phi_0 \sin(\Omega t + C)$  που αντιστοιχεί σε  $\omega_1 \approx -\sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}}$ ,

$$\omega_2 \approx -\sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_2(I_2 - I_1)}} \sin(\Omega t + C), \omega_3 \approx \sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \cos(\Omega t + C).$$

Η περιστροφή γύρω από τον άξονα  $I_2$  είναι λύση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε  $\Phi = \pm\pi/2$ . Εκεί το δυναμικό είναι μέγιστο άρα η κίνηση είναι ασταθής. (Η χρονική κλίμακα  $1/\Omega$  αντιστοιχεί στο χρόνο που η  $\omega$  απομακρύνεται σημαντικά από την αρχική της κατεύθυνση  $\pm\hat{x}_2$ .)

Η περιστροφή γύρω από τον άξονα  $I_3$  είναι λύση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε  $2E = L^2/I_3 \Leftrightarrow \Omega = 0$  και  $\Phi = \pm\sqrt{\mathcal{E}t} \pm C$ . Είναι ευσταθής, γιατί αν διαταραχθεί, η σταθερά  $\sqrt{2EI_3 - L^2}$  που επηρεάζει τόσο τα πλάτη των  $\omega_1, \omega_2$  όσο και την  $\Omega$  θα γίνει ελαφρώς θετική, ίση με  $\sqrt{L_1^2(I_3/I_1 - 1) + L_2^2(I_3/I_2 - 1)}$  (χρησιμοποιώντας τις

αρχικές τιμές των συνιστωσών της στροφορμής στους κύριους άξονες). Κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους ως προς  $\Omega$  η λύση είναι  $\Phi = \pm \sqrt{E}t \pm C$  και οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας  $\omega_1 \approx \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \cos(\sqrt{E}t + C)$ ,  $\omega_2 \approx \pm \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \sin(\sqrt{E}t + C)$  και  $\omega_3 \approx \pm \sqrt{\frac{I_1 I_2 E}{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}}$ .

Η μελέτη της ευστάθειας μπορεί να γίνει και διαταρακτικά στις εξισώσεις Euler όπως στο παράδειγμα 11.15.

Η εύρεση των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας στους κύριους άξονες είναι το πρώτο βήμα στη μελέτη της περιστροφής του σώματος. Απομένει να βρεθεί πως στρέφεται το στερεό ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δηλ. πως αλλάζουν με το χρόνο οι γωνίες Euler, κάτι που δίνει η επίλυση των εξισώσεων 11.5–11.7. Το βήμα αυτό απλοποιείται σημαντικά αν επιλέξουμε τον άξονα  $\hat{\xi}_3$  του αδρανειακού συστήματος ομόρροπο της (σταθερής) στροφορμής,  $L = L\hat{\xi}_3$ , κάτι που δεν βλάπτει τη γενικότητα. Εφαρμόζοντας τον πίνακα στροφορμής βρίσκουμε  $I_1\omega_1 = L \sin \psi \sin \vartheta$ ,  $I_2\omega_2 = L \cos \psi \sin \vartheta$ ,  $I_3\omega_3 = L \cos \vartheta$ . Γνωρίζοντας τις  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_3(t)$  από την επίλυση των εξισώσεων Euler, από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε τις γωνίες  $\vartheta$ ,  $\psi$  και κατόπιν τη γωνία  $\varphi$  από την ολοκλήρωση της σχέσης 11.7. Συγκεκριμένα  $\vartheta = \arccos \frac{I_3\omega_3}{L}$ ,  $\psi$  είναι η κοινή λύση των

$$\tan \psi = \frac{I_1\omega_1}{I_2\omega_2}, \quad \sin \psi = \frac{I_1\omega_1}{L \sin \vartheta} \quad \text{και} \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{I_3} + \frac{2EI_3 - L^2}{I_3 L \sin^2 \vartheta}.$$

Επίσης η σταθερότητα της  $L \cdot \omega = 2E$  συνεπάγεται ότι σε αυτό το σύστημα η  $\omega_{\xi_3} = 2E/L$  είναι σταθερή.

Ένας τρόπος να καταλάβουμε τη στροφή του στερεού στο χώρο είναι να μελετήσουμε τη στροφή του διανύσματος της στροφορμής στο σύστημα των κύριων αξόνων του στερεού. Λόγω του ότι στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς η στροφορμή είναι σταθερή η στροφή του  $L$  ως προς τους άξονες  $Kx_1x_2x_3$  που κινούνται με το στερεό ουσιαστικά δίνει την περιστροφή του στερεού ως προς το σταθερό άξονα της στροφορμής. Αν το διάνυσμα της στροφορμής  $L$  έχει αρχή στο  $K$ , το πέρας του κινείται στην τομή της σφαίρας  $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2$  (που προκύπτει από τη διατήρηση της  $L^2$ ) και του ελλειπτικού κυλίνδρου  $\frac{I_1(I_3 - I_1)}{2EI_3 - L^2}\omega_1^2 + \frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - L^2}\omega_2^2 = 1$  (που όπως έχουμε βρει προκύπτει από συνδυασμό της διατήρησης της ενέργειας και του μέτρου της στροφορμής), έχει παραμετρική μορφή  $L_1 = I_1\omega_1 = \sqrt{\frac{2E - L^2/I_3}{1/I_1 - 1/I_3}} \cos \Phi$ ,  $L_2 = I_2\omega_2 = \sqrt{\frac{2E - L^2/I_3}{1/I_2 - 1/I_3}} \sin \Phi$ ,

$$L_3 = I_3\omega_3 = \pm \sqrt{\frac{E - \Omega^2 \sin^2 \Phi}{(1/I_1 - 1/I_3)(1/I_2 - 1/I_3)}} \quad \text{και φαίνεται στο σχήμα 11.4 για διάφορες τιμές της ενέργειας.}$$

### Παράδειγμα 11.12:

Μελετήστε την περιστροφική κίνηση στερεού στο χώρο απουσία ροπών ως προς το κέντρο μάζας μέσω Αναλυτικής Μηχανικής.

(α) Γράψτε την Λαγκρανζιανή συναρτήσεϊ του  $R_K$  και των γωνιών Euler.

(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για την περιστροφή.

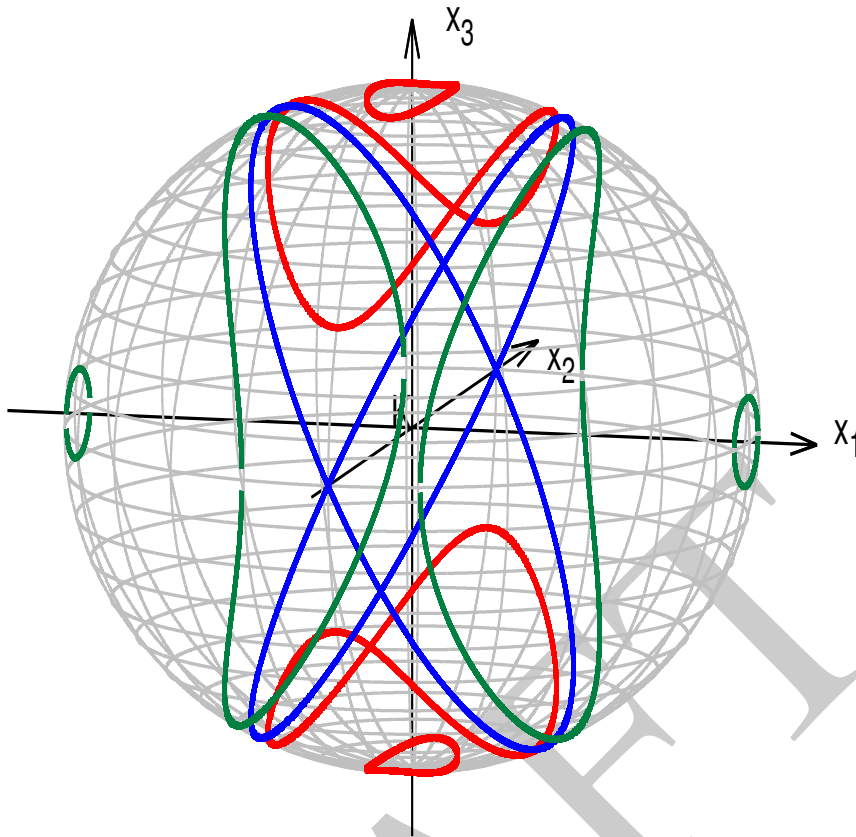
Λύση:

(α) Η Λαγκρανζιανή  $L = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) + \frac{1}{2}m\dot{R}_K^2 - V(R_K)$  είναι άθροισμα δύο ανεξάρτητων μερών, άρα η περιστροφική κίνηση δίνεται από το πρώτο μέρος και η κίνηση του  $K$  από το δεύτερο. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 11.5–11.7 βρίσκουμε το πρώτο μέρος  $L_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2$ .

(β)  $\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \varphi} = 0$  άρα υπάρχει ολοκλήρωμα κίνησης  $\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\varphi}} = I_1\omega_1 \sin \psi \sin \vartheta + I_2\omega_2 \cos \psi \sin \vartheta + I_3\omega_3 \cos \vartheta = L_{\xi_3} = \text{σταθερά}$ . Το ότι η έκφραση αυτή είναι η  $\xi_3$  συνιστώσα της στροφορμής προκύπτει από το μετασχηματισμό στροφής που δίνεται στο υποκεφάλαιο 11.2.

$\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\psi}} = I_3\omega_3$ ,  $\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\psi}} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$  (χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 11.5–11.7 για να αντικαταστήσουμε τις





Σχήμα 11.4: Η περιστροφή της  $L$  ως προς το στερεό για τις περιπτώσεις  $L^2/I_3 \leq 2E < L^2/I_2 \Leftrightarrow \Omega^2 < \mathcal{E} \leq L^2(1/I_1 - 1/I_3)(1/I_2 - 1/I_3)$  (με κόκκινο - συμπεριλαμβάνεται η ευσταθής περιστροφή γύρω από τον άξονα  $\hat{x}_3$ ),  $2E = L^2/I_2 \Leftrightarrow \mathcal{E} = \Omega^2$  (με μπλε - συμπεριλαμβάνεται η ασταθής περιστροφή γύρω από τον άξονα  $\hat{x}_2$ ) και  $L^2/I_2 < 2E \leq L^2/I_1 \Leftrightarrow 0 \leq \mathcal{E} < \Omega^2$  (με πράσινο - συμπεριλαμβάνεται η ευσταθής περιστροφή γύρω από τον άξονα  $\hat{x}_1$ ).

παραγώγους των γωνιών συναρτήσει των  $\omega_i$ ), άρα  $I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$ .

$\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\psi}} = I_1\omega_1 \cos \psi - I_2\omega_2 \sin \psi$ ,  $\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\vartheta}} = -(I_1\omega_1 \sin \psi + I_2\omega_2 \cos \psi)\dot{\psi} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \sin \psi + (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \cos \psi$  (χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 11.5–11.7 για να αντικαταστήσουμε τις παραγώγους των γωνιών συναρτήσει των  $\omega_i$ ), άρα  $[I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3] \cos \psi = [I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3] \sin \psi$ . Η τελευταία σε συνδυασμό με την εξίσωση  $[I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3] \sin \psi + [I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3] \cos \psi = 0$  που προκύπτει από την παράγωγο της  $I_1\omega_1 \sin \psi \sin \vartheta + I_2\omega_2 \cos \psi \sin \vartheta + I_3\omega_3 \cos \vartheta = L_{\varepsilon_3}$ , δίνει  $I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0$  και  $I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0$ .

**Παράδειγμα 11.13:**

Μελετήστε διανυσματικά την περιστροφική κίνηση αξισυμμετρικού στερεού στο χώρο απουσία ροπών ως προς το κέντρο μάζας. Θεωρήστε  $\hat{x}_3 = \hat{R}$  τον άξονα συμμετρίας που περνά από το κέντρο μάζας και είναι κύριος με ροπή  $I_3$  και τη ροπή στους κάθετους κύριους άξονες  $I_1$ .

(α) Δείξτε ότι στο σύστημα που κινείται με το στερεό η γωνιακή ταχύτητα γράφεται  $\omega = \hat{R} \times \dot{\hat{R}} + \omega_3 \hat{R}$  και η στροφορμή  $L = I_1 \dot{\hat{R}} \times \hat{R} + I_3 \omega_3 \hat{R}$ .

(β) Επιλύοντας την εξίσωση κίνησης δείξτε ότι η κίνηση είναι επαλληλία σταθερής ιδιοπεριστροφής του στερεού γύρω από τον άξονα συμμετρίας του  $\hat{R}$  και μετάπτωσης του άξονα συμμετρίας γύρω από το σταθερό άξονα  $L$ , με συνολική γωνιακή ταχύτητα  $\omega = \frac{L}{I_1} - \Omega \hat{R}$  με  $\Omega = \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) (L \cdot \hat{R})$ .

(γ) Επιλέγοντας  $L = L\hat{\xi}_3$  και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με την έκφραση  $\omega = \dot{\varphi}\hat{\xi}_3 + \dot{\vartheta}(\hat{\xi}_1 \cos \varphi + \hat{\xi}_2 \sin \varphi) + \dot{\psi}\hat{x}_3$  βρείτε τις γωνίες Euler.

Λύση:

Όπως στο παράδειγμα 11.1 το εξωτερικό γινόμενο της σχέσης  $\dot{\hat{R}} = \omega \times \hat{R}$  με  $\hat{R}$  δίνει  $\omega = \omega_{12} + \omega_3\hat{R}$  με  $\omega_{12} = \hat{R} \times \dot{\hat{R}}$ .

Η στροφορμή είναι  $L = I_1\hat{R} \times \dot{\hat{R}} + I_3\omega_3\hat{R}$  γιατί ο άξονας  $\hat{R} \times \dot{\hat{R}}$  είναι κύριος (όποια και αν είναι η κατεύθυνσή του, αρκεί που είναι κάθετος στον  $\hat{R}$ ).

(β) Η εξίσωση κίνησης είναι  $\dot{L} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(I_1\hat{R} \times \dot{\hat{R}} + I_3\omega_3\hat{R}) = 0$ .

Η προβολή της πάνω στο  $\hat{R}$ , χρησιμοποιώντας ότι  $\hat{R} \perp \hat{R} \times \dot{\hat{R}}$ , δίνει το ολοκλήρωμα  $I_3\omega_3 = L_3 = \text{σταθερά}$ , οπότε και η  $\omega_3$  είναι σταθερά.

Η ολοκλήρωσή της δίνει  $I_1\hat{R} \times \dot{\hat{R}} + I_3\omega_3\hat{R} = L = \text{σταθερά}$ .

Η προβολή της τελευταίας πάνω στο  $\hat{R}$  δίνει  $L \cdot \hat{R} = I_3\omega_3$ , δηλ. η γωνία μεταξύ του άξονα συμμετρίας και της στροφορμής είναι σταθερή και  $\omega_3 = \frac{L \cdot \hat{R}}{I_3}$ .

Το εξωτερικό γινόμενο με  $\hat{R}$  δίνει  $I_1(\hat{R} \times \dot{\hat{R}}) \times \hat{R} = L \times \hat{R} \Leftrightarrow \dot{\hat{R}} = \frac{L}{I_1} \times \hat{R}$ , οπότε η γωνιακή ταχύτητα είναι

$$\omega = \hat{R} \times \dot{\hat{R}} + \omega_3\hat{R} = \hat{R} \times \left( \dot{\hat{R}} = \frac{L}{I_1} \times \hat{R} \right) + \frac{L \cdot \hat{R}}{I_3}\hat{R} = \frac{L}{I_1} - \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) (L \cdot \hat{R})\hat{R}.$$

Η μετάπτωση του άξονα συμμετρίας γίνεται γύρω από το σταθερό άξονα  $L$  με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\frac{L}{I_1}$ , αφού  $\dot{\hat{R}} = \frac{L}{I_1} \times \hat{R}$ .

(γ) Συγκρίνοντας τις  $\omega = \frac{L}{I_1}\hat{\xi}_3 - \Omega\hat{x}_3$  και  $\omega = \dot{\varphi}\hat{\xi}_3 + \dot{\vartheta}(\hat{\xi}_1 \cos \varphi + \hat{\xi}_2 \sin \varphi) + \dot{\psi}\hat{x}_3$  προκύπτει ότι  $\dot{\psi} = -\Omega$ ,  $\vartheta = \text{σταθερά}$  και  $\dot{\varphi} = L/I_1$ .

#### Παράδειγμα 11.14:

Μελετήστε την περιστροφή στερεού στο χώρο απουσία ροπών ως προς το κέντρο μάζας στην περίπτωση που δύο από τις κύριες ροπές είναι ίσες.

(α) Επιλύστε τις εξισώσεις Euler.

(β) Βρείτε τις γωνίες Euler θεωρώντας αδρανειακό σύστημα στο οποίο η στροφορμή είναι  $L = L\hat{\xi}_3$ .

(γ) Έστω επίπεδο στερεό σώμα για το οποίο ισχύει  $I_3 = I_1 + I_2$ . Αν επιπλέον ισχύει  $I_1 = I_2$  και το στερεό περιστρέφεται κυρίως γύρω από τον άξονα συμμετρίας του, αλλά ταυτόχρονα ο άξονας αυτός μεταπίπτει γύρω από σταθερή διεύθυνση σχηματίζοντας μικρή γωνία με αυτή, δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα της μετάπτωσης είναι διπλάσια της ιδιοπεριστροφής.

Λύση:

(α) Έστω  $I_2 = I_1$ . Η τρίτη εξίσωση Euler δίνει τότε  $\omega_3 = \text{σταθερά}$ . Οι πρώτες δύο αποτελούν σύστημα  $\dot{\omega}_1 = -\Omega\omega_2$ ,  $\dot{\omega}_2 = \Omega\omega_1$  με  $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3$ . Λύνοντας την πρώτη ως προς  $\omega_2 = -\frac{\dot{\omega}_1}{\Omega}$  και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει  $\ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$ . Η λύση είναι  $\omega_1 = D \cos(\Omega t + C)$  οπότε και η πρώτη δίνει  $\omega_2 = D \sin(\Omega t + C)$ .

Προέκυψε λοιπόν  $\omega = D \cos(\Omega t + C)\hat{x}_1 + D \sin(\Omega t + C)\hat{x}_2 + \omega_3\hat{x}_3$  με σταθερές  $D, C, \omega_3$ , κάτι που δείχνει ότι στο σύστημα των κύριων αξόνων η γωνιακή ταχύτητα έχει ένα μέρος στο επίπεδο  $x_1x_2$  (το επίπεδο που σχηματίζουν οι άξονες με ίσες ροπές αδράνειας) το οποίο στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα ανάλογα με το πρόσημο του  $\Omega$ ) και ένα σταθερό μέρος στον κάθετο άξονα  $x_3$ .

(β) Η στροφορμή είναι σταθερό διάνυσμα όπως προκύπτει από την εξίσωση κίνησης στη μορφή  $\dot{L} = 0$ . Οι δύο γωνίες Euler προκύπτουν από το μετασχηματισμό του διανύσματος  $L = L\hat{\xi}_3$  μεταξύ των δύο συστημάτων που δίνει  $I_1\omega_1 = L \sin \psi \sin \vartheta$ ,  $I_2\omega_2 = L \cos \psi \sin \vartheta$ ,  $I_3\omega_3 = L \cos \vartheta$ , δηλ.  $\vartheta = \text{σταθερά}$  για την οποία ισχύουν  $I_1D = L \sin \vartheta$ ,  $I_3\omega_3 = L \cos \vartheta$  και  $\psi = \frac{\pi}{2} - (\Omega t + C)$ . Η τρίτη γωνία βρίσκεται από

$$\dot{\psi} = \omega_3 - \dot{\vartheta} \cos \vartheta \Leftrightarrow \dot{\vartheta} = \frac{\omega_3 + \Omega}{\cos \vartheta} = \frac{L}{I_1}$$

Η σταθερή στροφορμή γράφεται στο σύστημα των κύριων αξόνων που κινούνται με το στερεό  $L = I_1 D \cos(\Omega t + C) \hat{x}_1 + I_1 D \sin(\Omega t + C) \hat{x}_2 + I_3 \omega_3 \hat{x}_3$ . Το ότι ισχύει  $L \cdot \hat{x}_3 = I_3 \omega_3 =$  σταθερά, αφού η  $\omega_3$  είναι σταθερή, δείχνει επίσης ότι ο άξονας  $\hat{x}_3$  σχηματίζει σταθερή γωνία με τη στροφορμή. Η γωνιακή ταχύτητα γράφεται  $\omega = \frac{L}{I_1} - \Omega \hat{x}_3$ , όπως στο παράδειγμα 11.13 που αφορούσε αξισυμμετρικό σώμα. Το ότι το αποτέλεσμα είναι ίδιο οφείλεται στο ότι για την περιστροφή του στερεού δεν έχει σημασία αν το σχήμα του είναι αξισυμμετρικό ή όχι, αλλά το κατά πόσον δύο από τις κύριες ροπές αδράνειας είναι ίσες. Η σχέση  $\dot{\hat{x}}_3 = \omega \times \hat{x}_3 = \frac{L}{I_1} \times \hat{x}_3$  δείχνει ότι ο άξονας  $\hat{x}_3$

περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\frac{L}{I_1}$  γύρω από το σταθερό διάνυσμα  $L$ . Οι γωνίες Euler μπορούν να βρεθούν μέσω της σύγκρισης των εκφράσεων  $\omega = \frac{L}{I_1} \xi_3 - \Omega \hat{x}_3$  και  $\omega = \dot{\varphi} \xi_3 + \dot{\vartheta}(\xi_1 \cos \varphi + \xi_2 \sin \varphi) + \psi \hat{x}_3$ , όπως στο παράδειγμα 11.13.

(γ) Στην περίπτωση είναι  $L \approx I_3 \omega_3 = 2I_1 \omega_3$  και προκύπτει  $\dot{\varphi} = L/I_1 \approx 2\omega_3$ .

Ισοδύναμα, προκύπτει  $\Omega = \omega_3$  και άρα  $\dot{\vartheta} = \frac{\omega_3 + \Omega}{\cos \vartheta} = \frac{2\omega_3}{\cos \vartheta} \approx 2\omega_3$  για μικρές γωνίες  $\vartheta$ .

**Παράδειγμα 11.15:**

(α) Για την κίνηση στερεού στο χώρο απουσία ροπών ως προς το κέντρο μάζας, δείξτε ότι κάθε περιστροφή γύρω από ένα κύριο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα αποτελεί λύση των εξισώσεων Euler.

(β) Διαταράξτε την προηγούμενη λύση και αποφανθείτε αν η λύση είναι ευσταθής ή ασταθής.

(γ) Αν κατά την περιστροφή ενός στερεού απουσία ροπών ως προς το κέντρο μάζας η στροφορμή διατηρείται, αλλά η ενέργεια μπορεί να ελαττωθεί, δείξτε ότι το σώμα θα καταλήξει να κινείται γύρω από τον άξονα με τη μέγιστη ροπή αδράνειας.

Λύση:

(α) Είναι προφανές ότι αν π.χ.  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  και  $\omega_3 = \Omega =$  σταθερά οι εξισώσεις Euler ικανοποιούνται.

(β) Θεωρώντας τις  $\omega_1, \omega_2$  και  $\omega_3 - \Omega = \delta$  διαταραχές πρώτης τάξης, η αντικατάσταση στις εξισώσεις Euler, κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους, δίνει  $I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \Omega \omega_2 = 0, I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \Omega \omega_1 = 0, I_3 \dot{\delta} = 0$ .

Η τελευταία δίνει ότι  $\delta =$  σταθερά.

Για να λύσουμε τις δύο πρώτες πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν  $I_1 = I_2 = I_3$  τότε η λύση είναι σταθερή και άρα ευσταθής.
- Αν  $I_3 = I_1 \neq I_2$  τότε η  $\omega_2$  είναι σταθερή, αλλά η  $\omega_1$  μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, άρα είναι ασταθής.
- Αν  $I_3 = I_2 \neq I_1$  τότε η  $\omega_1$  είναι σταθερή, αλλά η  $\omega_2$  μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, άρα είναι ασταθής.
- Αν η  $I_3$  είναι διαφορετική και από την  $I_1$  και από την  $I_2$ , ο συνδυασμός των εξισώσεων δίνει (αφού λύσουμε την

πρώτη ως προς  $\omega_2$  και αντικαταστήσουμε στη δεύτερη)  $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2 - I_3} \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega}$  και  $\ddot{\omega}_1 + \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \Omega^2 \omega_1 = 0$ .

Για να είναι ευσταθής η λύση πρέπει να ισχύει  $(I_3 - I_2)(I_3 - I_1) > 0$ , δηλ. πρέπει η  $I_3$  να είναι η ακρότατη κύρια ροπή αδράνειας, είτε η μεγαλύτερη από τις τρεις, είτε η μικρότερη από τις τρεις.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο άξονας ως προς τον οποίο έγινε η μελέτη είναι οποιοσδήποτε κύριος άξονας, καταλήγουμε στα εξής:

- Αν όλες οι ροπές είναι ίσες έχουμε ευστάθεια.
- Αν δύο από τις ροπές είναι ίσες και η τρίτη διαφορετική, η περιστροφή γύρω από τον άξονα με την διαφορετική ροπή είναι ευσταθής, ενώ η περιστροφή γύρω από τους άλλους δύο άξονες είναι ασταθής.
- Αν και οι τρεις ροπές είναι διαφορετικές, η περιστροφή γύρω από τον άξονα με την ενδιάμεση ροπή είναι ασταθής, ενώ η περιστροφή γύρω από τους άλλους δύο άξονες είναι ευσταθής.

(γ) Με δεδομένη τη σταθερότητα της  $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2$  η ελάχιστη τιμή της περιστροφικής κινητικής ενέργειας  $E = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}$  είναι  $\frac{L^2}{2I_{\max}}$ . Αν υπάρχει λοιπόν τρόπος να ελαττωθεί η ενέργεια η περιστροφή γύρω από τον άξονα με την ελάχιστη ροπή αδράνειας είναι ασταθής. Η μόνη ευσταθής περιστροφή είναι αυτή γύρω

από τον άξονα με τη μέγιστη ροπή αδράνειας. Το σώμα θα καταλήξει να περιστρέφεται με  $\omega = L/I_{\max}$  γύρω από τον άξονα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ροπή αδράνειας, ο οποίος θα καταλήξει να έχει τη διεύθυνση της (σταθερής) στροφορμής  $L$ .

## 11.7 Ασκήσεις

### Ασκήσεις με λύση

**11.7.1** Για την κίνηση της σβούρας με σταθερό  $\vartheta$  (η οποία λέγεται κανονική μετάπτωση) δείξτε ότι απαιτείται  $\omega_3^2 \geq \frac{4mgRI_1}{I_3^2} \cos \vartheta$ . Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης συναρτήσει των  $\omega_3$  και  $\vartheta$ .

Υπόδειξη: Σκεφτείτε τι πρέπει να ισχύει για την  $V_{\text{eff}}(\vartheta)$  αν η γωνία  $\vartheta$  είναι σταθερή και γράψτε αυτή την εξίσωση σαν τριώνυμο ως προς  $\dot{\varphi}$ .

**11.7.2** Μια σβούρα έχει αρχικά τον άξονα κατακόρυφο ( $\vartheta_0 = 0$ ), περιστρέφεται με  $\omega_3$ , αλλά έχει και μη-μηδενική  $\dot{\vartheta}_0$ . Περιγράψτε την κίνησή της (μετάπτωση, κλόνηση και ιδιοπεριστροφή).

### Άλυτες ασκήσεις

**11.7.1** Μελετήστε μέσω Αναλυτικής Μηχανικής την ελεύθερη περιστροφική κίνηση στο χώρο στερεού με  $I_1 = I_2$  (δηλ. αξισυμμετρικού ως προς τις ροπές αδράνειας στους κύριους άξονες που περνούν από το κέντρο μάζας του).

(α) Γράψτε την Λαγκρανζιανή συναρτήσει των γωνιών Euler.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν τρία ολοκληρώματα μέσω των οποίων η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη.