② 20/12/20

Πιθανογεννήτριες

① Ορισμός: $X \geq 0$ ακέραια τμ με σπ $f_X(k) = P_r[X=k]$, $k=0,1,\dots$

Πιθανογεννήτρια της X:

$$P_X(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k}_{\text{αναλυτικά}} = \underbrace{E[z^X]}_{\text{πιθανοθεωρητικά}}$$

② Ιδιότητες

1) $P_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1$ αν $X<\infty$ με πιθ. 1.

$P_X(z)$ συγκλίνει τουλάχιστον στον $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

2) $f_X(k) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$, $k=0,1,\dots$ Η $P_X(z)$ χαρακτηρίζει την X

$P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow f_X(k) = f_Y(k)$, X, Y ισόνομες

3) $E[X(X-1)(X-2)\dots(X-r+1)] = P_X^{(r)}(1)$

$E[X] = P_X'(1)$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$

$= P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2$

↳ αποδ. $P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k \Rightarrow P_X^{(r)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) k(k-1)\dots(k-r+1) z^{k-r}$

$\Rightarrow P_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$

4) $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ανεξάρτητες. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Τότε $P_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$

↳ αποδ. $P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1+\dots+X_n}] = E[z^{X_1} z^{X_2} \dots z^{X_n}] \overset{\text{ανεξ}}{=}$
$E[z^{X_1}] E[z^{X_2}] \dots E[z^{X_n}] = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \dots P_{X_n}(z)$

5) $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες + ισόνομες με $P_{X_i}(z) = P_X(z)$.

N ανεξ. X_i με $P_N(z)$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

↳ αποδ. $P_{S_N}(z) = E[z^{\sum_{i=1}^{N} X_i}] =$

$\sum_{n=0}^{\infty} P_r[N=n] \underbrace{E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i} | N=n]}_{[P_X(z)]^n} \overset{4)}{=} P_N(P_X(z))$

③ Βασικές Δυναμοσειρές

1) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $|z|<1$ Γεωμετρική σειρά

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ Εκθετική

3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$ Διωνυμική

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$ Αρνητική Διωνυμική

↳ παραγωγίζω την 1) n φορές.

$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, z^{k-n} = 1\cdot 2 \cdots n \cdot \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \Longrightarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!\,n!} z^{k-n} = \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \overset{\cdot z^n}{\Longrightarrow}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] z^k = (1-z)^{-n}$ ισοδύναμος με 4).

$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \binom{n+k-1}{k}$

④ Πιθανογεννήτριες κλασικών διακριτών τμ.

1) $X \sim Be(p) \rightsquigarrow f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ (1-p) & k=0 \end{cases}$

$P_X(z) = (1-p)z^0 + p z^1 = 1-p+pz$

2) $X \sim Bin(n,p)$ = # επιτυχιών σε n ανεξ. δοκιμές Bernoulli με πιθ. p.

$P_X(z) = (1-p+pz)^n$

↳ αποδ 1: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim Be(p) \Longrightarrow P_X(z) = [P_{X_1}(z)]^n = (1-p+pz)^n$

$\hookrightarrow$ αποδ2 $f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$

Άρα $P_X(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{pz}{1-p}\right)^k =$

$(1-p)^n \cdot \left(\frac{1-p+pz}{1-p}\right)^n = (1-p+pz)^n$

3) $X \sim Geom(p)$ X = # επιτυχιων μεχρι την πρωτη αποτυχια σε ανεξ ~~...~~ δοκιμες Bernoulli με πιθ. επιτ. p

$f_X(k) = (1-p)p^k$

$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p) p^k z^k = \frac{1-p}{1-pz}$

αλλιώς: από ΘΔΜΤ : $P_X(z) = E[z^X] = p\,E[z^{1+X}] + (1-p)\,E[z^0]$

$P_X(z) = pz\,P_X(z) + 1 - p \Rightarrow P_X(z) = \frac{1-p}{1-pz}$

4) $X \sim NegBin(n,p)$ X = # επιτυχιών μέχρι n-στη επιτυχία

$f_X(k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n$, $k = 0,1,2,\ldots$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Longrightarrow P_X(z) = \left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^n$

αλλιώς κλασικά με τη δυναμοσειρά 4)

5) $X \sim Poisson(\lambda)$ $f_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,\ldots$

$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$

6) $X \sim DiscreteUniform(\{0,1,2,\ldots,n-1\})$

$f_X(k) = \frac{1}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$

$P_X(z) = \frac{1}{n} z^0 + \frac{1}{n} z^1 + \ldots + \frac{1}{n} z^{n-1} = \frac{1-z^n}{n(1-z)}$

⑤ Αντιστροφή Πιθανογεννητριών

$$P_X(z) \longrightarrow f_X(k) = P_r[X=k] \begin{cases} \to \text{κλειστός τύπος} \\ \quad \text{ή} \\ \to \text{αναδρομικός τύπος.} \end{cases}$$

• Ρητές Πιθ/τριες $P_X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

Είναι πάντα δυνατή η αντιστροφή

Βήμα 1: Υπολογισμός άγνωστων ποσοτήτων
$P_X(1) = 1$ και ρίζες του $D(z)$ στο $\{z \in \mathbb{C} \ \ |z| \leq 1\}$ είναι και ρίζες του $N(z)$

Βήμα 2: Παραγοντοποίηση $D(z)$

Βήμα 3: Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Βήμα 4: Ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κάθε κλάσματος

πχ. $P_X(z) = \dfrac{az+b}{z^2 + \frac{5}{2}z + 1} = \dfrac{az+b}{(z-2)(z-1/2)}$

$\cancel{\text{Άρα} \begin{cases} a \cdot 2 + b = 0 \\ a \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ \end{cases}}$

$\frac{1}{2}$ ρίζα του $az+b$ και $P_X(1) = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

Άρα $P_X(z) = \dfrac{-z + 1/2}{(z-2)(z-1/2)} = \dfrac{1}{2-z} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{2^k}$

$\Longrightarrow f_X(k) = \dfrac{1}{2^{k+1}} \quad k = 0, 1, \ldots$

πχ. $P_X(z) = \dfrac{c - 15}{54 - 63z + 18z^2}$

$P_X(1) = 1 \Rightarrow c - 15 = 54 - 63 + 18 \Rightarrow c = 24$

$D(z) = 54 - 63z + 18z^2 = 18(z-2)(z-3/2)$

$P_X(z) = \dfrac{24 - 15z}{18(2-z)(3/2-z)} = \dfrac{A}{2-z} + \dfrac{B}{\frac{3}{2} - z} \quad (1)$

(1) $(2-z)$ και $z=2$: $\dfrac{24-15\cdot 2}{18(\frac{1}{2}-2)} = A \Rightarrow A = \dfrac{2}{3}$

$(1)\cdot(3/2-z)$ και $z=3/2$: $\dfrac{24-15\cdot 3/2}{18(2-3/2)} = B \Rightarrow B = \dfrac{1}{6}$

Αρα $P_x(z) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2-z} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{\frac{3}{2}-z} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2z}{3}}$

$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_x(k) z^k = \dfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k z^k + \dfrac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k z^k$

$\Rightarrow f_x(k) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$

8 Εύρεση αναδρομικών σχημάτων για αντιστροφή ρητών πιθανογεν

$P_x(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow D(z)P_x(z) = N(z)$ και εξισώνω συντελεστές του z^k.

πχ. $(54-63z+18z^2)\underbrace{P_x(z)}_{\sum f_x(k) z^k} = 24-15z$

z^0: $54 f_x(0) = 24 \Rightarrow f_x(0) = 24/54$

z^1: $-63 f_x(0) + 54 f_x(1) = -15 \Rightarrow f_x(1)$ γνωστό.

$k\geq 2$: $54 f_x(k) - 63 f_x(k-1) + 18 f_x(k-2) = 0$

$\hookrightarrow f_x(k) = \dfrac{63}{54} f_x(k-1) - \dfrac{18}{54} f_x(k-2)$, $k\geq 2$