Εκθετική Κατανομή

① Ορισμος

Μια τμ X λέμε οτι ακολουθεί την εκθετικη κατανομή, αν:

(i) $X \geq 0$

(ii) X (απολυτα) συνεχής (έχει πυκνότητα & παραγωγίσιμη σκ)

(iii) $P_r[X-s>t \mid X>s] = P_r[X>t] \; \forall t,s>0$. (Αμνήμονη ιδιοτητα)

② Χαρακτηριστικά της Εκθετικής

Εστω $g(t) = P_r[X>t]$, X τμ με την εκθετική κατανομη. Τότε

(i) $g(0)=0$

(ii) $\exists\, g'(t)$

(iii) $\forall t,s$ $g(t+s) = P_r[X>t+s] = P_r[X-s>t] = \dfrac{P_r[X-s>t]}{P_r[X>s]} P_r[X>S] =$

$= P_r[X-s>t \mid X>s] \cdot P_r[X>s]$

$= P_r[X>t] P_r[X>S] = g(t)g(s)$.

Εχουμε επαγωγικά:

$g(t_1+t_2+\ldots+t_n) = g(t_1)\cdots g(t_n)$, $t_i \geq 0$.

Άρα για $n \in \mathbb{N}$

$g(n) = g(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ φορές}}) = (g(1))^n$

Επισης $g(1) = g(\underbrace{\tfrac{1}{m}+\ldots+\tfrac{1}{m}}_{m \text{ φορές}}) = \left(g\left(\tfrac{1}{m}\right)\right)^m \Rightarrow g(1)^{1/m} = g\left(\tfrac{1}{m}\right)$

Άρα $g\left(\tfrac{n}{m}\right) = g(\underbrace{\tfrac{1}{m}+\ldots+\tfrac{1}{m}}_{n \text{ φορές}}) = \left(g\left(\tfrac{1}{m}\right)\right)^n = \left(g(1)\right)^{n/m}$

Άρα $g(q) = (g(1))^q$ για $q \in \mathbb{Q}$, $q>0$.

Άρα $x \in \mathbb{R}$, $x>0$. Παίρνω q_n ακολ. $\in \mathbb{Q}$ με $q_n \to x$.

και $g(x) \overset{\text{συν.}}{=} \lim_{n\to\infty} g(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(1)^{q_n} = g(1)^x$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x>0$ $\quad g(x) = g(1)^x = e^{-\overbrace{(-\log g(1))}^{\lambda} x} = e^{-\lambda x}$

Αρα $P_r[X>t] = g(t) = e^{-\lambda t}$ όπου $\lambda = -\log g(1) > 0$

Οποτε $F_X(t) = P_r[X \le t] = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ σκ

$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ σππ

μετασχ. Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF_X(t) = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

$E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = (-1)^n \lambda (-1)(-2)\dots(-n) \lambda^{-(n+1)} = \frac{n!}{\lambda^n}$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

③ Ιδιότητες της Exp

1) Αμνήμονη: $P_r[X-s>t \mid X>s] = P_r[X>t] \quad \forall t,s>0$

2) Κλίμακος: $X \sim Exp(\lambda)$, $a>0 \Rightarrow aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

↳ αποδ: διαισθηση: Η αμνήμονη ιδιότητα της X δεν επηρεάζεται από την αλλαγή στη μονάδα μέτρησης

τυπικά: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

$F_{aX}(t) = P_r[aX \le t] = P_r[X \le t/a] = \begin{cases} 1-e^{\lambda/a\, t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases} \Rightarrow aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

3) Ισχυρή αμνήμονη: $X \sim Exp(\lambda)$, Y ανεξ. X $\Rightarrow P_r[X-Y>t \mid X>Y] = P_r[X>t] \; \forall t$

↳ αποδ: διαισθηση: Η αμνήμοσ της X δεν επηρεάζεται

τυπικά: $P_r[X-Y>t \mid X>Y] = \frac{P_r[X-Y>t, X>Y]}{P_r[X>Y]} = \frac{P_r[X>Y+t]}{P_r[X>Y]} =$

$$\overset{\text{opt}}{=} \frac{\int_0^\infty P_r[X>y+t]\,dF_Y(t)}{\int_0^\infty P_r[X>y]\,dF_Y(y)} = \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda(y+t)}\,dF_Y(y)}{\int_0^\infty e^{-\lambda y}\,dF_Y(y)} = e^{-\lambda t} = P_r[X>t].$$

4) Ιδιοτητα min: $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. $X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda_i)\ \forall t>0,\ i=1,2,\dots,n$

$$\Longrightarrow \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}xp\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big)$$

↳ αποδ. διαίσθηση: αν κάθε εξάρτημα ενός μηχανήματος έχει την αμνήμον ιδιότητα τότε και το μηχάνημα έχει την αμνήμον.

τυπικά: $F_{\min(X_1,\dots,X_n)}(t) = P_r[\min(X_1,\dots,X_n) \le t] =$

$1 - P_r[\min(X_1,\dots,X_n) > t] = 1 - P_r[X_1>t,\dots,X_n>t] =$

$$1 - P_r[X_1>t]\,P_r[X_2>t]\dots P_r[X_n>t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}\dots e^{-\lambda_n t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}xp\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big)$$

5) Ιδιότητα δείκτη min: $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. $X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda_i),\ i=1,2,\dots,n$

$N:\ \{N=i\} = \{\min(X_1,\dots,X_n) = X_i\},\ i=1,2,\dots,n$

$$P_r[N=i] = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j},\quad i=1,2,\dots,n$$

↳ αποδ: τυπικά: $P_r[N=i] = P_r[\min(X_1,\dots,X_n) = X_i] =$

$$P_r[X_i<X_1, X_i<X_2,\dots, X_i<X_{i-1}, X_i<X_{i+1},\dots, X_i<X_n] \overset{\text{θοπ}}{=}$$

$$\int_0^\infty \underbrace{P_r[t<X_1, t<X_2,\dots, t<X_{i-1}, t<X_{i+1},\dots, t<X_n]}_{P_r[t<X_1]P_r[t<X_2]\dots P_r[t<X_{i-1}]P_r[t<X_{i+1}]\dots P_r[t<X_n]}\underbrace{f_{X_i}(t)}_{\lambda_i e^{-\lambda_i t}}dt =$$

$$\lambda_i\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}\,dt = \lambda_i\left[\frac{e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}}{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}\right]_0^\infty = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$$

6) Ανεξαρτησίας min & δείκτη min: ίδιες υποθέσεις με το 5)

$\Longrightarrow N,\ \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ανεξ.

↳ αποδ: $P_r[N=i,\ \min(X_1, X_2,\dots, X_n) > t] =$

$$P_r[t<X_i,\ X_i<X_1,\ X_i<X_2,\dots, X_i<X_{i-1}, X_i<X_{i+1},\dots, X_i<X_n] =$$

$$= \int_t^\infty e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}\dots e^{-\lambda_{i-1}x}e^{-\lambda_{i+1}x}\dots e^{-\lambda_n x}\underbrace{f_{X_i}(x)}_{\lambda_i e^{-\lambda_i x}}dx$$

$$= \lambda_i\int_t^\infty e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)x}dx = \lambda_i\cdot\frac{e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}}{\lambda_1+\dots+\lambda_n} = \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}}_{P_r[N=i]}\cdot\underbrace{e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}}_{P_r[\min X_i>t]}$$

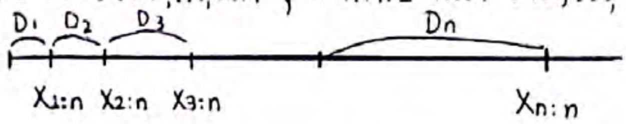
7) Αθροισματος $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ ανεξ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Erlang(n\,\lambda)$
$= Gamma(n\,\lambda)$

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \; t>0$$

$$F_{S_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \; t>0$$

8) Τυχαιου Αθροισματος: $X_1, X_2, \dots \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ ανεξ.
N ανεξ. των X_i με $Pr[N=n] = (1-p)^{n-1} p, \; n \geq 1$
$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda p)$ αποδ. Μετασχ. L-S (μάθημα 3)

9) Διαστήματα (spacings): $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ ανεξ.
$X_{i:n}$ = η i-οστη διατεταγμένη των $X_1, X_2, \dots, X_n$.
$(X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$, $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n))$



$D_1 = X_{1:n}$, $D_i = X_{i:n} - X_{(i-1):n}$
$D_1, \dots, D_n$ ανεξ και $D_i \sim \mathcal{E}xp((n-i+1)\lambda)$
↳ αποδ: $D_1 = X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}xp(\lambda + \dots + \lambda) = \mathcal{E}xp(\lambda)$
$D_2 = X_{2:n} - X_{1:n} = \min(\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1 \; \mathcal{E}xp(\lambda)}) \sim \mathcal{E}xp((n-1)\lambda)$
: υπολ. χρόνοι ζωής των αρχικών εκτός από την μικρότερη

(4) Άσκηση:
Ένα μηχάνημα έχει η εξαρτήματα με ανεξ. χρόνους ζωής $\mathcal{E}xp(\lambda)$ το καθένα.
Το μηχάνημα λειτουργεί όσο λειτουργούν τουλάχιστον k από τα εξαρτήματά του.
Υπολογίστε το μέσο χρόνο ζωής του μηχανήματος.
Έστω X_i χρόνος ζωής εξαρτήματος i και X χρόνος ζωής του μηχανήματος

$$X = X_{(n-k+1):n} = D_1 + D_2 + \dots + D_{n-k+1} \Rightarrow E[X] = E[D_1] + \dots + E[D_{n-k+1}]$$

$$= \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \dots + \frac{1}{(n-n+k-1+1)\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{k}\right)$$