18/3/19 Μάθημα 7

Σ.μ.Ε.Ε.

Ανανεωτική Εξίσωση
Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

① Ανανεωτική Εξίσωση

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(x)$ και η ανανεωτική συνάρτηση $m_X(t) = E[N(t)]$. Έχουμε την Ανανεωτική Εξίσωση:

$$\underbrace{h(t)}_{\text{άγνωστη συνάρτηση}} = \underbrace{d(t)}_{\text{γνωστή συνάρτηση}} + \int_0^t h(t-u)\, d\underbrace{F_X(u)}_{\text{γνωστή σ.κ.}} \iff$$

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t).$$

Η λύση της προϋποθέτει τη γνώση της $m_X(t)$ και δίνεται από τον τύπο:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t)$$

Η ανανεωτική εξίσωση έχει και κάποια οικονομική ερμηνεία:

② Οικονομική Ερμηνεία

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία.

Έστω ότι $d(t)$ = "Επίδραση" από ένα γεγονός μετά από χρόνο t (π.χ. διάδοση ενός κύματος)

$h(t)$ = Συνολική "επίδραση" από γεγονότα μέχρι τη στιγμή t

Σύνδεση $h(t), d(t)$:

- $1^{ος}$ τρόπος: Ανανεωτική εξίσωση

  Σκεφτόμαστε διαισθητικά ως εξής:

$$\text{Συνολική επίδραση τη στιγμή } t \overset{(*)}{=} \underbrace{\text{Επίδραση από το γεγονός 0 τη στιγμή } t}_{d(t)} + \underbrace{\text{Συνολική επίδραση από τα υπόλοιπα τη στιγμή } t}_{\text{εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ανανεωτικό συλλογισμό}} \Rightarrow$$

$$h(t) = d(t) + \int_0^t \left(\text{Συνολική επίδραση σε χρόνο } t-u\right) dF_X(u) \Rightarrow h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u).$$

- $2^{ος}$ τρόπος: Λύση

(*)[οι δύο σχέσεις που γράψαμε με λόγια είναι ουσιαστικά το ίδιο, απλώς από διαφορετική οπτική: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{\text{το βλέπω ως ένα αντικείμενο}}$ και $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$]

$$\text{Συνολική επίδραση τη στιγμή } t \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \text{Συνολική επίδραση τη στιγμή } t \text{ από το γεγονός } k \Rightarrow$$

$$h(t) = \underbrace{d(t)}_{\text{επίδραση από το γεγονός 0}} + \underbrace{\int_0^t d(t-u)\, dF_{S_1}(u)}_{\text{Επίδραση από το γεγονός 1}} + \underbrace{\int_0^t d(t-u)\, dF_{S_2}(u)}_{\text{Επίδραση από το γεγονός 2}} + \dots \overset{F_{S_k} = F^{*k}}{\Longrightarrow}$$

$h(t) = d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)$. Όμως, $m_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t)$, άρα

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_X(u).$$

Άρα δείξαμε „και λογικά" ότι αυτή είναι η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης. Οι δύο σχέσεις (ανανεωτική εξίσωση και λύση της) δε δίνουν εύκολα εργαλεία για μελέτη οριακής συμπεριφοράς. Αυτή θα μας τη δώσει το Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα.

(3) Προαπαιτούμενες έννοιες για το Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Ορισμός: Μια τ.μ. X λέγεται περιοδική αν $\exists p > 0: \Pr[X \in \{0p, 2p, 3p, \dots\}] = 1$.
Ο μεγαλύτερος p με αυτή την ιδιότητα λέγεται περίοδος της X. Αν η X δεν είναι περιοδική, τότε λέγεται απεριοδική [η έννοια της περιοδικής τ.μ. θυμίζει διακριτές τ.μ., αλλά είναι διαφορετικές: οι διακριτές τ.μ. παίρνουν τιμές απλώς σε ένα αριθμήσιμο σύνολο, οι περιοδικές σε πρόοδο]

Παραδείγματα: 1] Μία συνεχής τ.μ. ή μεικτή είναι απεριοδική.

2] Οι $Bin(n,p)$, $Geom(p)$, $NegBin(n,p)$, $Poisson(\lambda)$ είναι περιοδικές με περίοδο 1 (π.χ. η $Poisson(\lambda)$ παίρνει τις τιμές $0,1,2,3,\ldots$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε για $p=0.5, 0.7$, κλπ. Ο μεγαλύτερος p που μας δίνει αυτή τη δυνατότητα είναι το $p=1$, άρα περίοδος=1)

3] Η τ.μ. X με $\Pr[X=0]=\frac{1}{3}$, $\Pr[X=1]=\frac{1}{3}$, $\Pr[X=\sqrt{2}]=\frac{1}{3}$ δεν είναι περιοδική (δεν μπορούμε να εκφράσουμε και το 1 και το $\sqrt{2}$ ως ακέραιο πολλαπλάσιο κάποιου ακεραίου p)

4] Η τ.μ. X με $\Pr[X=\frac{1}{n}]>0$, $n=1,2,\ldots$, και $\sum_{n=1}^{\infty}\Pr[X=\frac{1}{n}]=1$ δεν είναι περιοδική.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το Β.Α.Θ.:

④ Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Εργαλείο για υπολογισμό του $\lim_{t\to\infty} h(t)$ όταν $h(t)$ είναι λύση ανανεωτικής εξίσωσης:

Έστω η ανανεωτική εξίσωση $h(t)=d(t)+\int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)$ και $d(t)=d_1(t)-d_2(t)$, όπου

(i) $d_1(t), d_2(t) \geq 0$, φθίνουσες και φραγμένες

(ii) $\int_0^\infty |d(t)|dt<\infty$ (θέλουμε να είναι "κάπως ομαλή" η γνωστή συνάρτηση d)

Περίπτωση 1 (θα τη χρησιμοποιούμε πιο πολύ):

Αν X απεριοδική (οι συνεχείς π.χ., που βλέπουμε συχνά), τότε

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu}, \text{ όπου } \mu=E[X]$$

Περίπτωση 2: Αν X περιοδική με περίοδο p, τότε

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{h(tp+x)}_{\substack{\text{κοιτάμε το όριο στα} \\ \text{πολλαπλάσια της περιόδου} \\ \text{μετατοπισμένα κατά μία διαφορά } x}} = \frac{p\cdot\sum_{k=1}^{\infty} d(kp+x)}{\mu}, \text{ όπου } \mu = E[X]$$

(το διακριτό ανάλογο του ολοκληρώματος)

Ιδέα απόδειξης: (η αυστηρή απόδειξη είναι από τις δυσκολότερες από άποψη Ανάλυσης στη Θεωρία Πιθανοτήτων)

Περίπτωση 1:

Από τη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης,

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty}\left(d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_X(u)\right).$$

Αφού $\int_0^\infty |d(t)|\,dt < \infty$, έπεται ότι $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$, άρα έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t_0(t)} d(t-u)\,dm_X(u) + \lim_{t\to\infty}\int_{t_0(t)}^{t} d(t-u)\,dm_X(u).$$

Για μεγάλα t και μικρά u, είναι $\lim_{t\to\infty}\int_0^{t_0(t)} d(t-u)\,dm_X(u) = 0$.

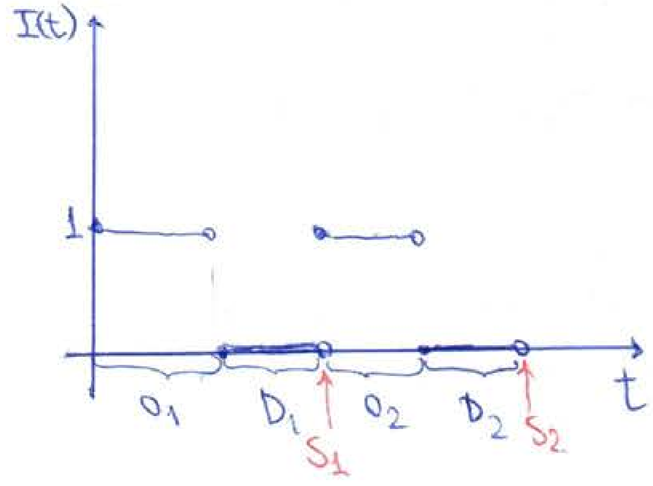
Για μεγάλα t και μεγάλα u, έχουμε από το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα

ότι $\lim_{t\to\infty}\int_{t_0(t)}^{t} d(t-u)\,dm_X(u) \underset{\Sigma A\Theta}{\simeq} \int_0^t d(t-u)\frac{1}{\mu}\,du = \frac{1}{\mu}\int_0^t d(t-u)\,du \overset{x=t-u}{=}$

$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty d(x)\,dx$. Άρα, $\lim_{t\to\infty} h(t) = \dfrac{\int_0^\infty d(x)\,dx}{\mu}$

Θα δούμε τώρα διάφορα Παραδείγματα, όπου θα βρίσκουμε την ανανεωτική εξίσωση και θα μελετάμε την οριακή συμπεριφορά. (είναι από τις κλασικές, αλλά και από τις πιο δύσκολες ασκήσεις του μαθήματος ΣΜΕΕ.)

(5) Η εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία (τυπική Άσκηση ~ SOS!)



Μηχανή που εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας (operating) και αργίας (down)

O_i : i-οστός χρόνος λειτουργίας μηχανής

D_i : i-οστός χρόνος αργίας μηχανής

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{σε στιγμή } t \text{ λειτουργίας} \\ 0, & \text{σε στιγμή } t \text{ αργίας} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $(O_i, D_i), i \geq 1$ ανεξάρτητες και ισόνομες, $F_{O,D}(x,y) = Pr[O_i \leq x, D_i \leq y]$ και η $O_i + D_i$ έχει απεριοδική κατανομή, $E[O_i] = \mu_O$, $E[D_i] = \mu_D$.

(i) Ανανεωτική εξίσωση για $p(t) = Pr[\text{Λειτουργία τη στιγμή } t]$

(ii) $p(t) = ?$

(iii) $\lim_{t \to \infty} p(t) = ?$ (μας ενδιαφέρει να ξέρουμε τι γίνεται μετά από πολύ χρόνο)

[Παρατήρηση:
Το φαινόμενο έχει μία στοχαστική περιοδικότητα: μετά από έναν κύκλο λειτουργίας-αργίας, αρχίζουν όλα από την αρχή. Άρα για την απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία μας ενδιαφέρουν οι στιγμές έναρξης λειτουργίας ή τέλους αργίας, δηλαδή οι $O_i + D_i$].

(iv) Ακριβής λύση για ειδικές περιπτώσεις, π.χ.

α) $O_i \sim Exp(\lambda)$, $D_i \sim Exp(\mu)$ ανεξ. β) $O_i \sim Exp(\lambda)$, $D_i = \underset{\text{γνωστή}}{c} \cdot O_i$

Λύση: (i) Από Παρατήρηση, έχουμε ότι $S_i = O_i + D_i$, άρα για ανανεωτικό συλλογισμό δεσμεύουμε στο $S_1 = O_1 + D_1$:

$$p(t) = Pr[I(t) = 1] = \int_0^\infty Pr[I(t) = 1 | S_1 = u] \, dF_{S_1}(u) =$$

$$= \int_0^\infty Pr\left[I(t)=1 \mid O_1+D_1=u\right] dF_{O+D}(u).$$ Τώρα έχουμε το πρώτο δύσκολο και σημαντικό σημείο: να φτιάξουμε σωστά τους κλάδους:

$$Pr\left[I(t)=1 \mid O_1+D_1=u\right] = \begin{cases} \underbrace{Pr[O_1>t \mid O_1+D_1=u]}_{\text{αν ο 1ος κύκλος έληξε τη στιγμή } u \text{ και } t<u \text{, τότε το ενδεχόμενο } \{I(t)=1\} \text{ είναι ισοδύναμο με λειτουργία και ισοδύναμο με το "τη στιγμή } t \text{ να μην έχει τελειώσει ο χρόνος λειτουργίας", που είναι το "} O_1>t \text{"}} , & \text{αν } u>t \\ \underbrace{p(t-u)}_{\text{αφού δεσμεύσαμε στο } O_1+D_1=u \text{ και } t\geq u \text{, κοιτάμε σε χρόνο } t-u} , & \text{αν } u\leq t \end{cases}$$

Άρα,

$$p(t) = \underbrace{\int_t^\infty Pr[O_1>t \mid O_1+D_1=u]\, dF_{O+D}(u)}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t p(t-u)\, dF_{O+D}(u)}_{\text{συνέλιξη αγνώστης } p \text{ με γνωστή σ.κ.}},$$

άρα φτιάξαμε την ανανεωτική εξίσωση, με όρους:

$$F_X(t) = F_{O+D}(t) \quad \text{και} \quad d(t) = \int_t^\infty \underbrace{Pr\left[O_1>t \mid O_1+D_1=u\right] dF_{O+D}(u)}_{\text{σκεφτόμαστε το } dF_{O+D}(u) \text{ ως } f_{O+D}(u) \text{, άρα τα βλέπουμε ως } Pr[O_1>t,\, O_1+D_1=u] \leftarrow \text{από κοινού}} =$$

$$= Pr\left[O_1>t,\ O_1+D_1>t\right] \underset{\{O_1>t\}\subseteq\{O_1+D_1>t\}}{=\!=} Pr\left[O_1>t\right] = 1-F_O(t).$$

(ii) Λύση της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$p(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_X(u) \overset{d(t)=1-F_O(t)}{=\!=} (1-F_O(t)) + \int_0^t (1-F_O(t-u))\, dm_{O+D}(u)$$

(iii) Θέλουμε να εφαρμόσουμε το Β.Α.Θ., άρα πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $d(t)=d_1(t)-d_2(t)$, d_1, d_2 φθίνουσες και φραγμένες. Συνήθως αυτό το βήμα προσθέτει άλλη μια δυσκολία, εδώ είναι έτοιμο:

$d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, όπου $d_1(t) = 1-F_O(t)$ και $d_2(t)=0$:

είναι $d_1(t)\geq 0$, $d_2(t)\geq 0$, d_1, d_2 φθίνουσες και φραγμένες.

$$\int_0^\infty |d(t)|\, dt = \int_0^\infty d(t)\, dt = \int_0^\infty (1-F_O(t))\, dt \overset{O\geq 0}{=\!=} \mu_O < \infty$$

[Υπενθύμιση: $X\geq 0 \Rightarrow E[X] = \int_0^\infty (1-F_X(x))\, dx$.

Proof $E[X] = \int_0^\infty x\, f_X(x)\, dx = \int_0^\infty \int_0^x du\, f_X(x)\, dx \overset{\text{Tonelli}}{\underset{\text{αλλάζουμε σειρά ολοκλήρωσης}}{=}}$

$= \int_0^\infty \underbrace{\int_u^\infty f_X(x)\, dx}_{1 - F_X(u)}\, du = \int_0^\infty (1 - F_X(u))\, du$]

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Β.Α.Θ., οπότε έχουμε

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)\, dt}{\mu} = \frac{\mu_O}{\mu_O + \mu_D}$$

[Διαισθητικά, λογικό: είναι το ποσοστό λειτουργίας $= \dfrac{\text{μέσος χρόνος λειτουργίας}}{\text{συνολικός μέσος χρόνος}} = \dfrac{\mu_O}{\mu_O + \mu_D}$]

(iv) β) Έχουμε δείξει ότι $p(t) = (1 - F_O(t)) + \int_0^t (1 - F_O(t-u))\, dm_{O+D}(t)$.

Εδώ, $1 - F_O(t) = e^{-\lambda t}$, $O_i + D_i = O_i + c \cdot O_i = (1+c) \cdot O_i \overset{O_i \sim Exp(\lambda)}{\sim} Exp\left(\frac{\lambda}{1+c}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{O+D}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + c} \cdot t$ (βλ. παράδειγμα υπολογισμού $m(t)$ για $X \sim Exp(\lambda)$, Μαθήματα 4,5)

Άρα, $p(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \frac{\lambda}{1+c}\, du = \ldots$