1/4/19 Μάθημα 10
Σ.μ.Ε.Ε.

Διαδικασία Poisson

[ειδική περίπτωση ανανεωτικής διαδικασίας, που μοντελοποιεί το "συμβαίνουν γεγονότα εντελώς τυχαία στον χρόνο"]

① Διαίσθηση

Λέμε ότι μία ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, αν η $N(t)$ μετράει το πλήθος γεγονότων στο $(0,t]$ που συμβαίνουν "εντελώς τυχαία" με ρυθμό λ.

Έχουμε 3 ισοδύναμους ορισμούς που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία. Εδώ θα χρησιμοποιούμε τον έναν και οι άλλοι δύο θα είναι θεωρήματα.

② Ορισμός I (Ανανεωτικός)

$\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ $\iff$ $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $Exp(\lambda)$

(είναι η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής που μας δίνει την τυχαιότητα: "το τι συμβαίνει δεν εξαρτάται από το τι συνέβη μέχρι τώρα" · το λ χρησιμοποιείται ως παράμετρος, ώστε να πετύχουμε τον επιθυμητό ρυθμό: $E(Exp(\lambda))=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ρυθμός $=\lambda$)

③ Απαριθμήτριες διαδικασίες

Ιδιότητες

Έστω $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία.

1] Η $\{N(t)\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις όταν για κάθε $t_1<t_2<\dots<t_n$ οι τ.μ. $N(t_1), N(t_2)-N(t_1), \dots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες

2) Η $\{N(t)\}$ έχει ομογενείς προσαυξήσεις αν για κάθε t, s ισχύει

ότι $\underbrace{N(t)}_{\text{\#γεγονότων στο } (0,t]} \overset{d}{=} \underbrace{N(s+t) - N(s)}_{\text{\#γεγονότων στο } (s,s+t]}$ [δηλαδή η κατανομή του πλήθους γεγονότων σε ένα διάστημα μήκους t δεν εξαρτάται από το ποιο είναι αυτό το διάστημα, αλλά μόνο από το μήκος του < συνδέεται με την τυχαιότητα, δεν έχουμε πχ ώρες αιχμής]

④ Ορισμός II (Μακροσκοπικός)

$\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ $\Leftrightarrow$ $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια και
(i) έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις
(ii) $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, δηλαδή

$$\Pr[N(t)=k] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \ k=0,1,\dots$$

[σαν ορισμός είναι μαθηματικά πιο εύχρηστος και συναντάται πιο συχνά στη βιβλιογραφία· ωστόσο, δεν είναι διαισθητικά προφανές γιατί θέλουμε η $N(t)$ να ακολουθεί κατανομή Poisson]

⑤ Ορισμός III (Τοπικός)

$\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ $\Leftrightarrow$ $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια και
(i) έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

ανεξάρτητες: Τα πόσα γεγονότα θα συμβούν σε 2 ξένα διαστήματα είναι ανεξ.

ομογενείς: Τα πόσα γεγονότα θα συμβούν σε ένα διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος

και (ii)

$$\Pr[N(h)=k] = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h), & k=0 \\ \lambda h + o(h), & k=1 \\ o(h), & k \geq 2 \end{cases}, \quad h \to 0^+,$$

όπου $\lim_{h\to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$ [το $o(h)$ δηλαδή πάει πιο γρήγορα από το h στο 0. Το χρησιμοποιούμε απλώς για να δείξουμε ότι δουλεύουμε τοπικά και άρα χρειαζόμαστε παράγοντες διόρθωσης].

Δείχνουμε τώρα ότι οι παραπάνω ορισμοί είναι πράγματι ισοδύναμοι:

⑥ Ισοδυναμία Ορισμών

$(\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II})$ Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με $Exp(\lambda)$ ενδιάμεσους χρόνους. Έστω $t>0$ και $X_1, X_2, \dots,$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι. Έστω

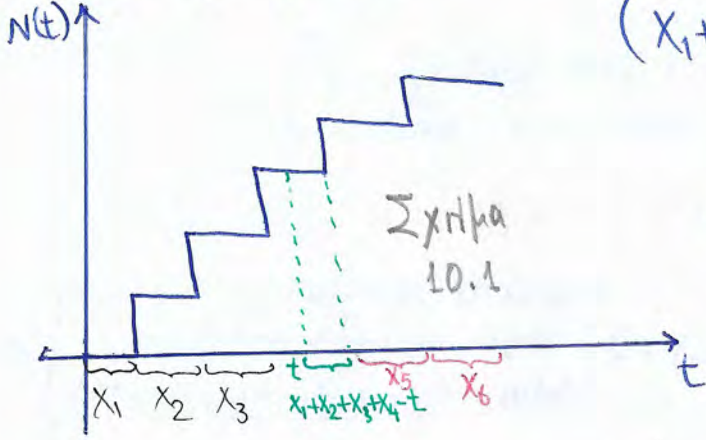
$\{N(u): 0 \le u < t\}$ ← παρελθόν τη στιγμή t και

$\{N(t+u): u \geq 0\}$ ← παρόν $(u=0)$ και μέλλον τη στιγμή t

και έστω $N(t)=k$. Τότε, το "παρελθόν" περιγράφεται από τις $X_1, X_2, \dots, X_k$. Το "μέλλον" περιγράφεται από τις

$$(X_1+X_2+\dots+X_{k-1}-t \mid X_1+X_2+\dots+X_{k+1}>t),$$

$$X_{k+2}, X_{k+3}, \dots \text{ (βλ. Σχήμα 10.1)},$$



Σχήμα 10.1

οπότε η ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \dots$ δίνει την ιδιότητα ανεξάρτητων προσαυξήσεων για την $\{N(t)\}$.

Η ομογένεια είναι πιο εύκολη: η $\{N(t+u)-N(t): u \geq 0\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμη με την $\{N(t): t \geq 0\}$, άρα παίρνουμε την ιδιότητα των ομογενών προσαυξήσεων. [η στοχαστική ισοδυναμία προέκυψε από το ότι η κατανομή ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$ είναι Exp]. Άρα ισχύει το (i) του Ορισμού II. Θα δείξουμε και τη (ii). Από ανανεωτική θεωρία, γνωρίζουμε ότι $F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \le t] = F_X^{*k}(t) \sim Erlang(k,\lambda)$, άρα

$$\Pr[S_k \le t] = \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \overset{\text{παραγοντικές}}{\underset{\text{ολοκληρώσεις}}{=}} 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

οπότε $\Pr[N(t)=k] \overset{\text{σχέση}}{\underset{\text{γέφυρα}}{=}} \Pr[S_k \le t < S_{k+1}] = \Pr[S_k \le t] - \Pr[S_{k+1} \le t]$

$$\Rightarrow \Pr[N(t)=k] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$(\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I})$ Έστω $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια με ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις και $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. Θα δείξουμε ότι είναι ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $Exp(\lambda)$.

Έστω X_i ο i-οστός ενδιάμεσος χρόνος.

$$\Pr[X_1 > t] \xlongequal[\substack{\text{τα } X_i \text{, άρα το} \\ \text{πάμε στη } N(t) \\ \text{με "γέφυρα"}}]{\substack{\text{δεν έχουμε} \\ \text{πληροφορία για}}} \Pr[N(t)=0] \xlongequal[\substack{\text{από} \\ \text{υπόθεση}}]{N(t)\sim \text{Poisson}(\lambda t)} e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t},$$

άρα $X_1 \sim Exp(\lambda)$.

$$\Pr[X_{n+1} > t \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n] \xlongequal{\text{το πάμε στη } N(t)}$$

$$\Pr\left[\underbrace{X_{n+1} > t}_{\text{ισοδύναμο με το "}N(t+\sum_{i=1}^{n} x_i)=n\text{" και το "}N(t+\sum_{i=1}^{n}x_i) - N(\sum_{i=1}^{n}x_i)=0\text{"}} \,\middle|\, \begin{matrix} N(u)=0 \text{ για } u\in(0,x_1),\ N(u)=1 \text{ για } u\in[x_1,x_1+x_2), \ldots, \\ N(u)=n-1 \text{ για } u\in[x_1+\ldots+x_{n-1},\ x_1+\ldots+x_n) \end{matrix}\right] =$$

$$\Pr\left[N(x_1+x_2+\ldots+x_n+t) - N(x_1+x_2+\ldots+x_n) = 0 \,\middle|\, \begin{matrix} N(u)=0 \text{ για } u\in(0,x_1), \\ N(u)=1 \text{ για } u\in[x_1,x_1+x_2), \ldots, \\ N(u)=n-1 \text{ για } u\in[x_1+\ldots+x_{n-1},\ x_1+\ldots+x_n) \end{matrix}\right] =$$

$$\xlongequal[\substack{\text{προσαυξήσεις} \\ \text{φεύγει η δέσμευση}}]{\substack{\text{από} \\ \text{ανεξάρτητες}}} \Pr[N(x_1+x_2+\ldots+x_n+t) - N(x_1+\ldots+x_n) = 0] \xlongequal[\text{προσαυξήσεις}]{\text{ομογενείς}}$$

$$= \Pr[N(t)=0] = e^{-\lambda t} \Rightarrow X_{n+1} \sim Exp(\lambda) \text{ και } X_{n+1} \text{ ανεξάρτητη από τις } X_1, X_2, \ldots, X_n.$$

$(\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{III})$ $\Pr[N(h)=k] = e^{-\lambda h}\cdot\frac{(\lambda h)^k}{k!}$.

Για $k=0$, $\Pr[N(h)=0] = e^{-\lambda h} \xlongequal{\text{Taylor}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^n}{n!} = 1 - \lambda h + o(h)$.

Για $k=1$, $\Pr[N(h)=1] = e^{-\lambda h}\cdot\frac{(\lambda h)^1}{1!} = (1-\lambda h + o(h))\cdot \lambda h = \lambda h + o(h)$.

Για $k \geq 2$, $\Pr[N(h)=k] = e^{-\lambda h}\cdot\frac{(\lambda h)^k}{k!} = o(h)$.

(III ⇒ II) Έστω $p_n(t) = Pr[N(t)=n]$. Κοιτάζουμε την $\{N(t)\}$ στο διάστημα $(0,t+h] = (0,t] \cup (t,t+h]$ και εφαρμόζουμε Θ.Ο.Π.:

$$p_0(t+h) = Pr[N(t+h)=0] = Pr[N(t)=0,\ N(t+h)-N(t)=0] \overset{\text{ανεξάρτητες}}{\underset{\text{προσαυξήσεις}}{=\!=}}$$

$$Pr[N(t)=0]\cdot Pr[N(t+h)-N(t)=0] \overset{\text{ομογενείς}}{\underset{\text{προσαυξήσεις}}{=\!=}} Pr[N(t)=0]\cdot Pr[N(h)=0] \Rightarrow$$

$$p_0(t+h) = p_0(t)\cdot(1-\lambda h+o(h)) \Rightarrow \frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \cancelto{0}{\lim_{h\to0^+}\frac{o(h)}{h}} \Rightarrow p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \Rightarrow$$

$$\frac{p_0'(t)}{p_0(t)} = -\lambda \Rightarrow (\log p_0(t))' = -\lambda \Rightarrow p_0(t) = c\cdot e^{-\lambda t}.$$ Όμως,

$p_0(0) = Pr[N(0)=0] = 1 \Rightarrow c\cdot e^{-\lambda 0} = 1 \Rightarrow c=1$, οπότε $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, άρα ισχύει η $Pr[N(t)=k] = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ για $k=0$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι ισχύει γενικά. Έστω ότι ισχύει για $k=0,1,\dots,n-1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k=n$. Δουλεύουμε όπως πριν για αρχή:

$$p_n(t+h) = Pr[N(t+h)=n] \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=\!=} \sum_{k=0}^{n} Pr[N(t)=n-k,\ N(t+h)-N(t)=k] =$$

$$\overset{\text{ανεξάρτητες \& ομογενείς}}{\underset{\text{προσαυξήσεις}}{=\!=}} \sum_{k=0}^{n} Pr[N(t)=n-k]\cdot Pr[N(h)=k] = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(t)\cdot p_k(h).$$ Χρησιμοποιούμε τώρα την επαγωγική υπόθεση και έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(t)p_k(h) = p_n(t)\,p_0(h) + p_{n-1}(t)\,p_1(h) + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(t)p_k(h) =$$

$$= p_n(t)\cdot(1-\lambda h) + p_{n-1}(t)\cdot\lambda h + o(h) \Rightarrow$$

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \overset{h\to0^+}{\Longrightarrow}$$

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow$$

$$e^{\lambda t} p_n'(t) + e^{\lambda t} \lambda p_n(t) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) \xrightarrow[\text{υπόθεση}]{\text{επαγωγική}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right) = \lambda \cancel{e^{\lambda t}} \cdot \cancel{e^{-\lambda t}} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} \cdot p_n(t)\right) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \xrightarrow[\text{από 0 έως t}]{\text{ολοκληρώνουμε}}$$

$$e^{\lambda t} \cdot p_n(t) - e^{\lambda \cdot 0} \cdot \overset{0}{\cancel{p_n(0)}} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \int_0^t u^{n-1}\, du \Rightarrow e^{\lambda t} \cdot p_n(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!} \Rightarrow$$

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

[Στο εξής, θα χρησιμοποιούμε ισοδύναμα και τους 3 ορισμούς]

⑦ Βασικές ιδιότητες για υπολογισμούς

$S_k \sim Erlang(k, \lambda)$

$N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

$m(t) = E[N(t)] = \lambda t$

⑧ Άσκηση

$0 < s < t$. Ποια είναι η κατανομή $(N(s) \mid N(t) = n) \overset{d}{\sim} ?$

[Διαισθητικά: στο $(0,t)$ έγιναν εντελώς τυχαία n γεγονότα, άρα αν ζητάω #γεγονότων σε προηγούμενη χρονική στιγμή, είναι λογικό να βγαίνει διωνυμική ⇝ χωρίζω το $(0,t)$ σε διαστήματα και βλέπω το #γεγονότων ως #επιτυχιών]

Λύση: Για $k = 0, 1, \ldots, n$, $\Pr[N(s) = k \mid N(t) = n] = \dfrac{\Pr[N(s) = k, N(t) = n]}{\Pr[N(t) = n]} =$

$$= \frac{\Pr[N(s) = k, N(t) - N(s) = n-k]}{\Pr[N(t) = n]} \overset{\text{ανεξάρτητες προσαυξήσεις}}{=} \frac{\Pr[N(s) = k] \cdot \Pr[N(t) - N(s) = n-k]}{\Pr[N(t) = n]}$$

$$\overset{\text{ομογενείς προσαυξήσεις}}{=} \frac{\cancel{e^{-\lambda s}} \cdot \frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot \cancel{e^{-\lambda(t-s)}} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-\lambda t}} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

$$\Rightarrow (N(s) \mid N(t) = n) \sim Bin\left(n, \frac{s}{t}\right).$$