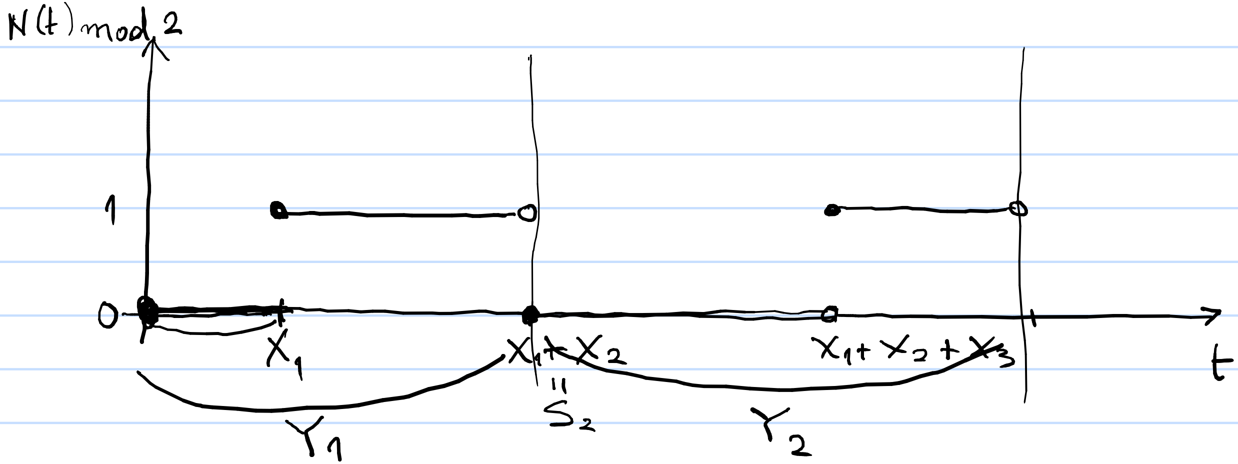
Αντώνης Οικονόμου

Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = \Pr[N(t)$ περιττός$]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και να λυθεί. Να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to\infty} h(t)$.

Λύση:



Αντώνης Οικονόμου

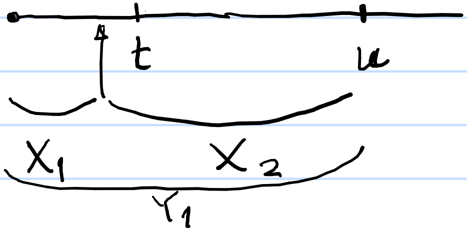
$h(t) = Pr[N(t) \text{ περιττός}]$ $\quad M(t)$ η ανανε. διαδ. με ενδιάμ. χρ.

$$F_X * F_X(t) = F_X^{*2}(t) = F_Y(t)$$

$$h(t) = \int_0^\infty Pr[N(t) \text{ περιττός} \mid Y_1 = u]\, dF_Y(u)$$

$$Pr[N(t) \text{ περ.} \mid Y_1 = u] = \begin{cases} Pr[t > X_1 \mid X_1 + X_2 = u], & u > t \\ \underbrace{Pr[N(t-u) \text{ περ.}]}_{h(t-u)}, & u \le t \end{cases}$$

$$h(t) = \int_0^t h(t-u)\, dF_Y(u) + \int_t^\infty Pr[t > X_1 \mid X_1 + X_2 = u]\, dF_Y(u)$$



$$d(t) = Pr[t > X_1,\ X_1 + X_2 > t]$$

Αντώνης Οικονόμου

$$
\begin{aligned}
d(t) &= \Pr\,[\, t > X_1 ,\ X_1 + X_2 > t \,] \longleftarrow \qquad X_1 \quad t \quad X_1+X_2 \\
&= \Pr\,[\{t > X_1\} \cap \{ t \geq X_1 + X_2\}^c] \\
&= \Pr\,[t > X_1] - \Pr\,[t \geq X_1 + X_2] \\
&= F_X(t) - F_X^{*2}(t) \\
&= \underbrace{(1 - F_X^{*2}(t))}_{\downarrow,\ \geq 0,\ \phi\rho.} - \underbrace{(1 - F_X(t))}_{\downarrow,\ \geq 0,\ \phi\rho.}
\end{aligned}
$$

ΒΑΘ

εφαρμόσιμο

$$
\int_0^\infty |d(t)|\,dt \leq \underbrace{\int_0^\infty (1 - F_X^{*(2)}(t))\,dt}_{2E[X]} + \underbrace{\int_0^\infty (1 - F_X(t))\,dt}_{E[X]} < \infty
$$

$$
\int_0^\infty d(t)\,dt = 2E[X] - E[X] = E[X].
$$

Αντώνης Οικονόμου

ΒΑΘ.

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)\,dt}{E[Y_1]} = \frac{E[X]}{E[X]+E[X]} = \frac{1}{2}$$