(*)

Ασκ 1 (Πρόταση)

Είναι ισοδύναμα:

(1) (X,τ) T_2-χώρος

(2) $\forall x,y\in X$ με $x\neq y$: $\exists\, V\in \mathcal{N}_x : y\notin \overline{V}$.

(3) $\bigcap\limits_{U\in \mathcal{N}_x} \overline{U} = \{x\}$.

Αποδ.

(1⇒2) X T_2, $x\neq y \Rightarrow \exists\, G,H\in\tau : x\in G,\ y\in H,\ G\cap H=\emptyset$

Θέτω $V=G\in \mathcal{N}_x$.

Αν $y\in\overline{V} \Rightarrow \forall W\in \mathcal{N}_y : W\cap V = W\cap G\neq\emptyset$

για $W=H$ έχω άτοπο.

(2⇒3) $\{x\}\subseteq \bigcap\limits_{U\in \mathcal{N}_x}\overline{U}$, γιατί $\{x\}\subseteq U\subseteq \overline{U}\ \forall U\in \mathcal{N}_x$.

Αντίστροφα:

$y\in \bigcap\limits_{U\in \mathcal{N}_x}\overline{U}$ και $y\neq x \overset{(2)}{\Longrightarrow}$ άτοπο.

(3⇒1) $x\neq y$ στον $X \Rightarrow y\notin \bigcap\limits_{U\in \mathcal{N}_x}\overline{U} \Rightarrow \exists\, U_0\in \mathcal{N}_x : y\notin\overline{U_0}$

$\Rightarrow \exists\, G=U_0^{\circ},\ H=(\overline{U_0})^c = X\setminus\overline{U_0}\in\tau$:

$x\in G$, $y\in H$ και $G\cap H = U_0^{\circ}\cap(X\setminus\overline{U_0})\subseteq$

$\subseteq \overline{U_0}\cap(X\setminus\overline{U_0})=\emptyset$.

ΚΕΦ 5-6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ 1 (X,τ) T_1, Y=πεπερ $\subseteq X \Rightarrow (Y, \tau_Y =$ σχετ$)$ διακριτός.

Αποδ $Y \subseteq X = T_1 \Rightarrow Y = T_1$.

$Y = T_1 \Leftrightarrow$ μονοσύνολα = κλειστά

Y = πεπερ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ κάθε υποσ. του Y είναι κλειστό $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ —"— Y —"— ανοιχτό $\Rightarrow$ Y διακριτός.

Ασκ 2 $X = T_2$, $x_1, \dots, x_n$ διακεκρ. σημεία $\in X \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, V_1, V_2, \dots, V_n$ ανοιχτά, ξένα ανά δύο: $x_i \in V_i$.

Αποδ X $T_2 \Rightarrow \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ $\exists\, V_{ij}, V_{ji}$ ανοιχτά ξένα:

$x_i \in V_{ij}$, $x_j \in V_{ji}$, $V_{ij} \cap V_{ji} = \emptyset$.

παρατ: $x_i \in V_{ij}$ $\forall j = 1, \dots, n \Rightarrow x_i \in V_i = \bigcap_{1 \le j \le n} V_{ij}$

Ισχυρ: $V_i \cap V_j = \emptyset$, αν $i \neq j$:

$V_i \subseteq V_{ij}$ και $V_j \subseteq V_{ji} \Rightarrow V_i \cap V_j \subseteq V_{ij} \cap V_{ji} = \emptyset$.

Παρατ Με ίδια αποδ: X T_4 και $F_1, \dots, F_n$ ξένα ανά δύο κλειστά $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, V_1, \dots, V_n$ ανοιχτά, ανά δύο ξένα: $F_i \subseteq V_i$.

Άσκ. 3

(2)

(X,τ_X) τχ., (Y,τ_Y) T_2-χώρος, $f,g: X \to Y$ συνεχείς,

$F=\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$. Τότε:

(1) F κλειστό

(2) F πυκνό $\subseteq X \Rightarrow f=g$.

Αποδ.

(1α) ΘΔο $X\setminus F$ ανοιχτό: $x\in X\setminus F \Rightarrow f(x)\neq g(x) \in Y - T_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V_1,V_2 \in \tau_Y : f(x)\in V_1,\ g(x)\in V_2,\ V_1\cap V_2=\emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in f^{-1}(V_1)\cap g^{-1}(V_2) = W \in \tau_X$.

Ισχυρ: $W\subseteq X\setminus F$: $y\in W \Rightarrow f(y)\in V_1 \wedge g(y)\in V_2 \Rightarrow$

$\xRightarrow{V_1\cap V_2=\emptyset} f(y)\neq g(y) \Rightarrow y\in X\setminus F$.

Αφού $x\in \underset{\tau_X}{\overset{}{W}} \subseteq X\setminus F \Rightarrow X\setminus F$ ανοιχτό $\Rightarrow$ F κλειστό.

(1β) Έστω (x_λ) στο F με $x_\lambda \to x \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_\lambda) \to f(x) \\ \| \\ g(x_\lambda) \to g(x)\end{matrix}\right\} \xRightarrow[T_2]{Y}$

$f(x)=g(x) \Rightarrow x\in F$, και F κλειστό

(1γ) Y $T_2 \Leftrightarrow \Delta_Y$ κλειστό $\subseteq Y\times Y$. Θέτω:

$\phi: X\to Y\times Y$: $\phi(x)=(f(x),g(x))$. Τότε ϕ συνεχής,

αφού $p_1\circ\phi = f$ και $p_2\circ\phi=g$ συνεχείς. Άρα

$\phi^{-1}(\Delta_Y)=$ κλειστό

$= \{x\in X \mid \phi(x)\in\Delta_Y\} = \{x\in X \mid f(x)=g(x)\} = F$.

(2) $\left.\begin{matrix} F \text{ κλειστό} \Rightarrow \overline{F}=F \\ F \text{ πυκνό} \Rightarrow \overline{F}=X\end{matrix}\right\} \Rightarrow F=X$ και $f=g$.

Ασκ. 4

(X,τ) $T_4 \iff \forall G_1, G_2 \in \tau$ με $G_1 \cup G_2 = X$

$\exists F_1, F_2$ κλειστά: $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$, $F_1 \cup F_2 = X$.

Αποδ

($\Rightarrow$) Έστω (X,τ) T_4 και $G_1, G_2 \in \tau$ με $G_1 \cup G_2 = X \Rightarrow$

$\Rightarrow G_1^c, G_2^c$ κλειστά με $G_1^c \cap G_2^c \overset{dM}{=} (G_1 \cup G_2)^c = X^c = \emptyset \Rightarrow$

$\underset{T_4}{\overset{X}{\Rightarrow}} \exists U_1, U_2 \in \tau : G_1^c \subseteq U_1, G_2^c \subseteq U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$\Rightarrow F_1 := U_1^c$, $F_2 := U_2^c$ κλειστά, με

$F_1 = U_1^c \subseteq G_1$, $F_2 = U_2^c \subseteq G_2$ και

$F_1 \cup F_2 = U_1^c \cup U_2^c \overset{dM}{=} (U_1 \cap U_2)^c = \emptyset^c = X$.

($\Leftarrow$) Παρόμοια: ΘΔο (X,τ) T_4. Θεωρούμε τυχαία

F_1, F_2 κλειστά με $F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow F_1^c, F_2^c \in \tau$ με

$F_1^c \cup F_2^c = (F_1 \cap F_2)^c = \emptyset^c = X \overset{\text{υπόθ.}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \exists$ κλειστά $K_1 \subseteq F_1^c$, $K_2 \subseteq F_2^c$: $K_1 \cup K_2 = X$

$\Rightarrow \exists$ ανοιχτά $K_1^c \supseteq F_1$, $K_2^c \supseteq F_2$:

$K_1^c \cap K_2^c = (K_1 \cup K_2)^c = X^c = \emptyset$.

$\boxed{\text{Ασκ 5}}$

$(X,\mathcal{T}_X)$ T_4, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ τχ, $f: X \to Y$ συνεχής, κλειστή και επί $\Rightarrow (Y,\mathcal{T}_Y)$ T_4.

Σχόλιο: $F_1, F_2 \subseteq Y$ κλειστά, ξένα $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2) \subseteq X$ κλειστά, ξένα και X T_4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, U_1, U_2$ ανοιχτά: $f^{-1}(F_1) \subseteq U_1$, $f^{-1}(F_2) \subseteq U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$\Rightarrow f(f^{-1}(F_1)) \subseteq \underbrace{f(U_1)}_{;\text{ανοιχτό}}$, $f(f^{-1}(F_2)) \subseteq \underbrace{f(U_2)}_{;\text{ανοιχτό}} \Rightarrow$;;

$;; \supseteq F_1$ $\qquad$ $;; \supseteq F_2$

$f(U_1) \cap f(U_2)$;

Αποδ

$G_1, G_2 \in \mathcal{T}_Y : G_1 \cup G_2 = Y \Rightarrow$

$f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) \in \mathcal{T}_X : f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2) = X - T_4 \xRightarrow{\text{προηγ. Ασκ.}}$

$\exists$ κλειστά $F_1 \subseteq f^{-1}(G_1)$, $F_2 \subseteq f^{-1}(G_2)$: $F_1 \cup F_2 = X \Rightarrow$

$\exists\, f(F_1), f(F_2)$ κλειστά με

$f(F_1) \subseteq f(f^{-1}(G_1)) = G_1$, $f(F_2) \subseteq f(f^{-1}(G_2)) = G_2$,

$f(F_1) \cup f(F_2) = Y$. (f επί) $\xRightarrow{\text{προηγ. Ασκ.}}$

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ T_4.

$\boxed{\text{Ασκ 6}}$

(X,τ) τχ., $\tau^* = \{A\in\tau : A\neq\emptyset\}$. Τότε:

X διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow \exists (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} : \tau_n \subseteq \tau^*$:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = \tau^*, \quad \forall n\in\mathbb{N}: \bigcap_{A\in\tau_n} A \neq \emptyset .$$

Αποδ

($\Rightarrow$) Έστω X διαχωρ. & $\underbrace{D\subseteq X}_{=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}$ αριθμ., πυκνό.

Θέτω

$\tau_n = \{A\in\tau^* : x_n\in A\} \Rightarrow \bigcup \tau_n = \tau^*$.

Πράγματι: $\bigcup\tau_n \subseteq \tau^*$ προφανώς.

$A\in\tau^* \to A\cap D\neq\emptyset \Rightarrow \exists x_n\in A\cap D \Rightarrow A\in\tau_n$.

Επίσης $\bigcap_{A\in\tau_n} A\neq\emptyset$ διότι $x_n\in\bigcap_{A\in\tau_n}A$.

($\Leftarrow$) $\forall n\in\mathbb{N}$ $\bigcap_{A\in\tau_n} A\neq\emptyset$, επιλέγω $x_n\in\bigcap_{A\in\tau_n}A$.

Θέτω $D=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ = αριθμ.

Έστω $\underset{\neq\emptyset}{A\in\tau} \Rightarrow A\in\tau^* = \bigcup\tau_n \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}: A\in\tau_{n_0}$

$\Rightarrow x_{n_0}\in A \Rightarrow$

$\Rightarrow A\cap D\neq\emptyset$,

δηλ. D πυκνό.

$\boxed{\text{Ασκ. 7}}$

$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ τχ, $\mathcal{F} = \{f_i : Y \to X_i\}$ οικογ. απεικονίσεων που διαχωρίζουν τα σημεία του Y (: δηλ. $\forall\, y_1 \neq y_2 \in Y$ $\exists\, i_0 \in I$: $f_{i_0}(y_1) \neq f_{i_0}(y_2) \in X_{i_0}$). Θέτουμε

$$\phi : Y \to \prod X_i : \phi(y) = (f_i(y))$$

Αν τ_Y η αρχική τοπολογία στον Y από την $\mathcal{F}$, τότε $\phi : Y \to \phi(Y)$ ομοιομορφισμός (ϕ τοπολ. εμφύτευση).

Απόδ.

$\forall\, y \neq z \in Y$ $\exists\, f_{i_0}(y) \neq f_{i_0}(z) \Rightarrow \phi(y) \neq \phi(z)$, δηλ. ϕ 1-1.

ΓΥΠΕΝΘ: $(x_\lambda) \subseteq \prod X_i \Rightarrow x_\lambda = (x_\lambda^i)_{i\in I}$ και

$$x_\lambda \to x = (x_i) \underset{\Leftarrow (2)}{\overset{\Rightarrow (1)}{\Longleftrightarrow}} x_\lambda^i \to x_i \quad \forall i \in I$$

ϕ συνεχής: Έστω $(y_\lambda) \subseteq Y$ με $y_\lambda \to y \underset{\text{συν.}}{\overset{f_i}{\Longrightarrow}}$

$$\Rightarrow f_i(y_\lambda) \to f_i(y) \;\forall i \underset{(2)}{\Longrightarrow} (f_i(y_\lambda)) \to (f_i(y)) \in \prod X_i$$

$$\phi(y_\lambda) \to \phi(y).$$

ϕ^{-1} συνεχής: Έστω $\phi(y_\lambda) \to \phi(y) \in \phi(Y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_i(y_\lambda)) \to (f_i(y)) \in \prod X_i \underset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow f_i(y_\lambda) \to f_i(y) \;\forall i \in I \Longrightarrow$$ (τ_Y αρχική από f_i)

$\Rightarrow y_\lambda \to y$.

$\boxed{\text{Άσκ. 8}}$

$(X,\tau_{\mathcal{F}})$ τχ, με $\tau_{\mathcal{F}}$ = αρχική από $\mathcal{F} = \{f_n : X \longrightarrow \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$ και $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του $X \Rightarrow (X,\tau_{\mathcal{F}})$ μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδ</u>

Από την προηγ. Άσκ. $(X,\tau_{\mathcal{F}})$ ομοιομορφικός με $(\phi(X), \tau=\text{σχετ.})$ από $\phi(X) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}$, και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ μετρικοποιήσιμο, σαν αριθμ. γινόμενο μετρικών χώρων $\Rightarrow$ υπόχωρος $\phi(X)$ μετρικοποιήσιμος.

$\boxed{\text{Άσκ } 9}$

$(X_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ τχ, $(X=\prod X_i,\ \mathcal{T}_\gamma =$ τοπ-γιν.$)$

Σταθεροποιούμε $j\in I$, $z=(z_i)\in X$, και θέτουμε

$$g: X_j \longrightarrow X: \quad g(x)=(x_i) \mid x_i = \begin{cases} z_i, & i\neq j\\ x, & i=j. \end{cases}$$

Τότε $(X_j,\mathcal{T}_j)$ και $(g(X_j),\ \mathcal{T}_{\sigma\chi} =$ σχετική$)$ είναι ομοιόμορφοι.

<u>Απόδ:</u> g 1-1: $x\neq y\in X_j \Rightarrow g(x)\neq g(y)$ (διαφέρουν στην j-συντεταγμένη).

g συνεχής: $(X_j,\mathcal{T}_j)\longrightarrow(\prod X_i,\mathcal{T}_\gamma) \Longleftrightarrow$

$p_i\circ g: (X_j,\mathcal{T}_j)\longrightarrow (X_i,\mathcal{T}_i)$ συνεχής, $\forall i\in I$. Όμως:

$$\forall x\in X_j: \quad p_i\circ g(x) = x_i = \left.\begin{cases} z_i, & i\neq j\\ x, & i=j \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_i\circ g = \left.\begin{cases} \text{σταθ}=z_i, & i\neq j\\ \text{ταυτοτ. } id_{X_j}, & i=j \end{cases}\right\} \text{ συνεχής, } \forall i\in I.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\hat{g}: (X_j,\mathcal{T}_j)\longrightarrow (\underset{X}{\underset{\cap}{g(X_j)}},\ \mathcal{T}_{\sigma\chi}) \text{ συνεχής } \Longleftrightarrow$$

$\varepsilon\circ\hat{g} = g: (X_j,\mathcal{T}_j)\longrightarrow(X,\mathcal{T}_\gamma)$ συνεχής, όπου ε η καν. εμφύτευση. Άρα $\hat{g}$ 1-1, επί, συνεχής.

$$\begin{tikzcd}
(X_j,\mathcal{T}_j) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\hat{g}"'] & & (X=\prod X_i,\ \mathcal{T}_\gamma) \\
& (g(X_j),\ \mathcal{T}_{\sigma\chi}) \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

και $\hat{g}^{-1} : g(X_j) \longrightarrow X_j$ είναι συνεχής:

$$\begin{array}{l} \quad g(X_j) \\ \quad\ \ \Psi \\ \quad g(x) \\ \quad\ \ \| \\ (x_i) = (x,(z_i)_{i\neq j}) \end{array} \xmapsto{\ \hat{g}^{-1}\ } x = j\text{-συντετ. του } g(x).$$

δηλ $\hat{g}^{-1} = p_j|_{g(X_j)}$ = συνεχής σαν περιορισμός

συνεχούς σε υπόχωρο.