ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Συμπληρωματικές σημειώσεις στις αγκύλες Poisson σχετικά με τη διάλεξη της 9/6/22

Στην τελευταία διάλεξη του 2022 (Διάλεξη 21η 9-6-22) επιχειρήθηκε αποτυχημένα η απόδειξη της ταυτότητας του Jacobi όσον αφορά στις αγκύλες Poisson:

$$\{\{A,B\},C\} + \{\{C,A\},B\} + \{\{B,C\},A\} = 0\,. \tag{1}$$

Όπως αναφέρθηκε στο μάθημα η απευθείας απόδειξη είναι τετριμμένη μεν, αλλά μακρά (έχει πολλές πράξεις). Εναλλακτικά θα μπορούσε να καταφύγει κανείς στην αναπαράσταση της αγκύλης Poisson ως διαφορικό τελεστή που τελικά γεννά συγκεκριμένους μετασχηματισμούς –είναι, όπως λέμε, γεννήτορας μετασχηματισμών.

Ας ορίσουμε λοιπόν τον διαφορικό τελεστή:

$$\mathcal{D}_C = \{\cdot, C\}$$

(ο ορισμός αυτός έχει το αντίθετο πρόσημο από τον αντίστοιχο ορισμό 11.87 του βιβλίου των Π.Ι&Θ.Α, αλλά το πρόσημο αποτελεί απλώς μια σύμβαση).

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, ο 1ος όρος του (1) μπορεί να γραφεί φορμαλιστικά

$$\mathcal{D}_C\{A,B\}\,.$$

Με τη νέα ορολογία μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dF(\mathbf{x},\mathbf{p})}{dt} = \{F,H\} = \mathcal{D}_H F\,.$$

Η ερμηνεία της παραπάνω έκφρασης είναι ότι ο γεννήτορας των χρονικών μεταθέσεων μιας συνάρτησης του χώρου των φάσεων κατά την εξέλιξη ενός συστήματος είναι ο $\mathcal{D}_H$, ; όπου η Χαμιλτονιανή του συστήματος. Σύμφωνα με τα λεχθέντα στη διάλεξη είναι

$$F(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t)) = e^{t\mathcal{D}_H} F(\mathbf{x}(0),\mathbf{p}(0))\,.$$

Ο $e^{t\mathcal{D}_H}$ γεννά την πεπερασμένη χρονική μετάθεση κατά t.

Αν εξετάσει κανείς πώς δρα ο διαφορικός τελεστής $\mathcal{D}_X$, διαπιστώνει ότι δεν είναι τίποτε άλλο από ένας γραμμικός συνδυασμός μερικών παραγωγίσεων παραγωγίσεων. Για παράδειγμα σε ένα σύστημα με 2-βαθμούς ελευθερίας (4-διάστατος χώρος φάσεων)

$$\mathcal{D}_X = \frac{\partial X}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial p_2}\,.$$

Επιπλέον μια αγκύλη Poisson δεν είναι τίποτε άλλο από γινόμενα μερικών παραγωγίσεων και εφόσον οι μερικές παράγωγοι μετατίθενται θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \{\{A,B\},C\} = \mathcal{D}_C\{A,B\} &= \{\mathcal{D}_C A, B\} + \{A, \mathcal{D}_C B\} \\ &= \{\{A,C\},B\} + \{A,\{B,C\}\} \\ &= -\{\{C,A\}.B\} - \{\{B,C\},A\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Στο πέρασμα στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήθηκε η αντισυμμετρική ιδιότητα της αγκύλης Poisson. Η απόδειξη της ταυτότητας του Jacobi ολοκληρώνεται με μεταφορά των όρων του δεξιού σκέλους στο αριστερό σκέλος.